



Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AGRONÓMICA Y
BIOCIENCIAS**

**NEKAZARITZAKO INGENIARITZAKO ETA BIOZIENTZIETAKO GOI MAILAKO
ESKOLA TEKNIKOA**

*Órbita Lunar: Cálculo y Análisis Mediante Datos Reales. Aplicación de las Leyes de Newton y
Herramientas Computacionales.*

.....

presentado por

AINHOA POLO IRIGOYEN

.....(e)k

aurkeztua

GRADO EN CIENCIA DE DATOS
GRADUA DATUEN ZIENTZIAN

SEPTIEMBRE, 2024

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	3
2. ESTUDIO DE LA ÓRBITA LUNAR.....	6
2.1. ÓRBITA KEPLERIANA.....	7
2.2. LEYES DE KEPLER.....	8
2.3. ELEMENTOS DE LA ÓRBITA KEPLERIANA	9
2.3.1. CÁLCULO DE LA ÓRBITA A PARTIR DEL VECTOR ESTADO.....	12
2.3.2. CÁLCULO DE EFEMÉRIDES	14
3. DATOS.....	15
3.1. CONTENIDO DE LOS DATOS	21
3.1.1. DATOS <i>VECTOR TABLE</i>	21
3.1.2. DATOS <i>OSCULATING ORBITAL ELEMENTS</i>	23
3.2. LECTURA Y ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN.....	24
3.3. TRANSFORMACIÓN DE LOS DATOS Y CÁLCULO DE VARIABLES.....	25
3.3.1. CÁLCULO DE LA DISTANCIA TIERRA-LUNA.....	25
4. INTERPRETACIÓN Y GRÁFICAS DE LAS VARIABLES	26
4.1. EL VECTOR ESTADO Y LA DISTANCIA TIERRA-LUNA	26
4.2. LOS ELEMENTOS ORBITALES DE LA ÓRBITA LUNAR.....	30
5. IMPLEMENTACIÓN DE CONCEPTOS CON LOS DATOS	35
6. WOLFRAM MATHEMATICA.....	39
7. CONCLUSIONES.....	41
8. ANEXO	43
9. REFERENCIAS	54
10. BIBLIOGRAFÍA.....	56

1. INTRODUCCIÓN

El espacio, la Luna y en general los planetas son algunos de los temas que más han interesado a la humanidad a lo largo de la historia. Desde el principio de los tiempos ha sido foco de curiosas miradas, que deseaban descubrir y aprender todo acerca de ellos, poder comprender el universo.

Concretamente, el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra es uno de los fenómenos más observados en astronomía debido a la cercanía de ésta y a cómo afecta a las mareas y los eclipses. Se conocen muchos estudios y avances que desafiaron el conocimiento y las creencias de esa época, como fue el caso de Anaxágoras, un matemático griego que más tarde sería encarcelado por declarar que la Luna y el Sol eran cuerpos rocosos gigantes y por lo tanto no eran dioses, como se creía entonces, y por afirmar además que la Luna reflejaba su luz (JJ O'Connor y EF Robertson, 1999; Ong Cheon, 2017). Esta y otras afirmaciones e investigaciones que se hicieron a lo largo de los años nos permiten tener el conocimiento del que se dispone hoy para poder trabajar en estudios más concretos. Algunos de los avances de los últimos años se detallan en algunas de las entradas de la página web de la NASA (Giraldo, 2024).

Para entender los conceptos como se conocen hoy en día es importante saber la evolución de estos mismos conceptos, ver y entender según el contexto de dónde se partió. En un artículo de la revista científica *Reviews of Modern Physics* (Gutzwiller, 1998) se presentan hitos importantes cronológicamente para poder entender la procedencia de los conocimientos de los que disponemos. A continuación se presenta un pequeño resumen con datos obtenidos de este mismo artículo.

El movimiento de la Luna tiene muchas particularidades que son muy difíciles de modelar, aunque su comportamiento se puede observar detenidamente sin la ayuda de instrumentos, como hicieron muchos a lo largo de la historia. Muchas de estas características se conocen con gran precisión desde hace 3.000 años y muchas de las explicaciones que se dieron en la antigüedad eran básicamente correctas, además de seguir en uso.

El ciclo de la Luna debió haberse notado hace mucho tiempo ya que sus salidas y puestas siguen un patrón bastante regular y similar al del Sol, pero con periodos diferentes. Los primeros registros de estudios sobre este tema pertenecen a Mesopotamia hace 3.000 años, algo después del año 1000 a.C. Se registraron observaciones de la Luna en el horizonte y se representaron algunas de estas mediciones mediante fórmulas aritméticas simples. Este registro consta de fragmentos rodos de tablillas de arcilla que se encontraron entre las ruinas de las antiguas ciudades. Se exploraron durante el siglo XIX y se conservan hasta hoy. La interpretación de esta escritura “cuneiforme” requirió muchas décadas debido a su dificultad y se considera uno de los milagros de la arqueología. Varios cientos de tablillas están dedicadas a mediciones astronómicas siendo los más antiguos del siglo VII a.C. y los más recientes del siglo I a.C. Algunas de ellas abarcan de seis a siete meses informando sobre el estado del cielo día a día; los datos de la Luna que se recopilaban incluyen la primera y última vez que se observó, las estrellas por las que pasó cerca y las diferencias horarias entre la salida y la puesta tanto de la Luna como del Sol. Muchas de ellas se centraban en los eventos cercanos a la luna llena. También desarrollaron un modelo “19-year period” para predecir lunas llenas de manera consistente. Este modelo se convirtió en base de los

calendarios predominantes en Oriente Medio. Como fue instituido como base del calendario griego en el año 432 a.C. por el astrónomo Metón, generalmente conocido como ciclo Metónico. El calendario judío tiene un ciclo de 19 años con 12 años cortos de 12 meses y 7 años largos de 13 meses. Por otro lado, el calendario cristiano se relaciona menos con la Luna haciendo una división del año en 12 meses cuya duración varía entre 28 y 31 días. Pero el ciclo de 19 años permaneció aquí. El calendario islámico, por otra parte, se planteó en la dirección opuesta, es decir, definir el año como 12 ciclos lunares de tal manera que 19 años son alrededor de 7 lunas llenas. Por lo tanto, los años islámicos, que comenzaron en 622, avanzan a un ritmo más rápido que los judíos y cristianos.

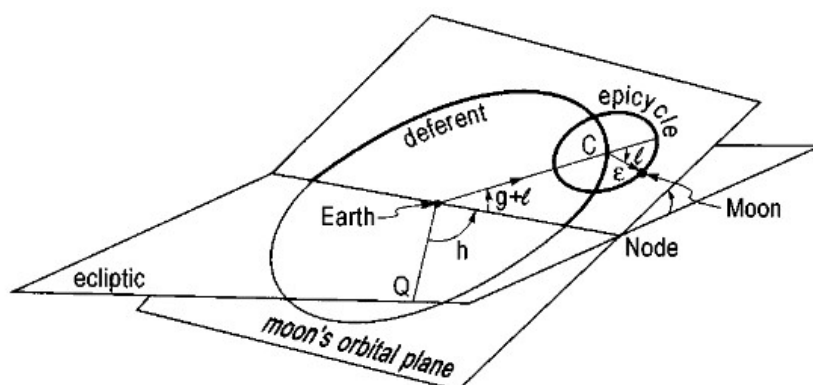
La segunda etapa fue iniciada por los primeros filósofos griegos, que pensaban que el universo eran un gran espacio vacío la Tierra flotando en el centro y el Sol, la Luna y los planetas moviéndose a su alrededor, frente a un fondo estrellado. A pesar de estas creencias, los matemáticos y astrónomos griegos finalmente llegaron a modelos geométricos sofisticados que proporcionaban descripciones exactas. Consideraban tres lugares que podían servir como origen de un sistema de coordenadas: topocéntrico (observatorio en la superficie de la Tierra), geocéntrico (desde el centro de la Tierra) o heliocéntrico (desde el centro del sistema solar). Un sistema de coordenadas polares completo se obtiene sumando la distancia desde el observador y todos estos sistemas de referencia fueron invención de los griegos debido a su visión puramente geométrica del universo. Estos sistemas de referencia se siguen utilizando a día de hoy y es curioso pensar que hace tantos años también era así. Con los conocimientos de la época y las herramientas que se tenían para mediciones lineales entre dos objetos, Eratóstenes de Cirene a principios del siglo III a.C. obtuvo un valor justo para la circunferencia de la Tierra, y los griegos finalmente concluyeron correctamente que la distancia de la Luna a la Tierra es aproximadamente 60 radios terrestres. La astronomía científica tuvo sus inicios en el año 432 a.C. cuando Metón introdujo el ciclo de 19 años en el calendario, como se ha comentado anteriormente, aunque los historiadores debaten sobre si se conocía dicho ciclo gracias a los babilonios o si lo habían descubierto los griegos de manera independiente. En esta época aparecen nombres muy reconocidos en este ámbito, como son Platón y Aristóteles en el siglo IV a.C., seguidos de Euclides y Apolonio y Arquímedes en el siglo III a.C. Hiparco llegó a mediados del siglo II a.C. antes de que se tenga una visión completa de la astronomía en el sentido moderno. La mayoría de sus obras no han sobrevivido, por lo que nuestro conocimiento de sus grandes logros viene del relato de Ptolomeo otros tres siglos más tarde, en el siglo II d.C. Describió las órbitas del Sol, de la Luna y de los cinco planetas clásicos, en términos de epiciclos, y determinó los parámetros relevantes. Además, ideó un método para predecir la aparición de eclipses solares y lunares y descubrió la precesión de los equinoccios. La astronomía griega terminó proponiendo la primera imagen completa y científicamente viable del sistema solar. La idea que tenemos sobre el universo y la manera de modelar y entender su funcionamiento no dista mucho de lo que se hacía en la antigüedad. Observar y medir primero los fenómenos del cielo y luego predecir acontecimientos futuros basándose en un modelo matemático se convirtió en el objetivo de todas las demás ciencias que se ocupan del mundo exterior.

Pasaron más de mil años antes de que las publicaciones de Ptolomeo fueran seriamente cuestionadas. Kepler estudió la órbita de Marte, pero antes de comenzar tenía que conocer de manera exacta la órbita de la Tierra alrededor del Sol (gran parte de su publicación en 1609 está

dedicada a este estudio preliminar). En este proceso de estudio da con las conocidas Leyes de Kepler, en un intento de facilitar los cálculos y fórmulas que obtuvo en un primer instante. En la Figura 1 se muestra el modelo planteado. El modelo griego era bastante similar, excepto que la elipse sería reemplazada por un círculo excéntrico.

Figura 1

Imagen de los tipos de órbitas de Kepler según el valor que tome la excentricidad e



Nota. Adaptado de Fig. 1 *The basic lunar model from antiquity (adopted ever since) [...]* [Imagen] tomado de *Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem* (p.600) por Martin C. Gutzwiller, 1998, *Reviews of Modern Physics*, 70(2).

A mediados del siglo XVII, la astronomía del sistema solar había llegado a un punto en el que cualquier avance posterior en el mismo sentido sólo podía confundir la nueva imagen del universo que habían creado Copérnico, Brahe y Kepler.

La tercera etapa se alcanzó a finales del siglo XVII con la obra de Isaac Newton, que representa el primer intento de explicar las observaciones tanto en la Tierra como en los cielos sobre la base de unas pocas "leyes" físicas en forma de relaciones matemáticas. Este primer esfuerzo de unificación puede considerarse un éxito sólo porque logró resolver algunos problemas difíciles, como la interacción de los tres cuerpos Luna-Tierra-Sol. Newton puso a prueba su gran teoría de la gravitación universal casi exclusivamente estudiando el movimiento de la Luna, incluido su efecto sobre el movimiento de la Tierra manifestando las mareas y la precesión de los equinoccios.

Respeto a la astronomía en los últimos siglos, es todo mucho más técnico. Mediante diversos métodos, Laplace (1749-1827) pudo afirmar que la mecánica celeste concordaba completamente con las observaciones astronómicas; en su obra publicada entre 1799 y 1805 validó la teoría de Newton afirmando que toda la astronomía en el sistema solar se puede reducir a las tres leyes del movimiento y la gravitación universal. Lagrange (1736-1813) inició una nueva tendencia en la que todos los problemas matemáticos de la mecánica podían resolverse mediante el mismo proceso uniforme; las transformaciones canónicas finalmente ganaron el campo. No utiliza el término "momentum" sino que se refiere a la "velocidad". Delaunay los utilizó por primera vez a gran escala para encontrar la solución definitiva al problema lunar perturbando la solución del problema de los dos cuerpos Tierra-Luna. Luego, Hill trató la trayectoria lunar como un desplazamiento de una órbita periódica que es una solución exacta de un problema restringido de tres cuerpos. La

dificultad de Newton para explicar el movimiento del perigeo lunar finalmente se resolvió y la órbita de la Luna se calculó mediante un nuevo método que se convirtió en el estándar universal hasta después de la Segunda Guerra Mundial. Poincaré abrió el siglo XX con su análisis de las trayectorias en el espacio de fases, su insistencia en investigar las órbitas periódicas incluso en sistemas ergódicos y su crítica a la teoría de la perturbación, particularmente en el caso del movimiento de la Luna. La exploración espacial, la astrofísica y el aterrizaje de los astronautas en la Luna condujeron a una nueva etapa en la mecánica celeste. La teoría lunar ahora tiene que confrontar muchos datos nuevos más allá del simple problema de los tres cuerpos para mejorar su precisión por debajo de un segundo de arco. La computación domina todos los avances teóricos.

Para este trabajo, además de conocer la historia, he necesitado investigar y obtener información de diferentes fuentes para finalmente llegar a mi objetivo que es calcular la distancia entre la Tierra y la Luna y estudiar su órbita respecto al primer cuerpo. Para ello, he utilizado registros de numerosas mediciones entre las que se incluye posición y velocidad en el espacio además de la excentricidad, inclinación, etc., a lo largo de una década. Otro de los objetivos, a pesar de disponer de ambos conjuntos de datos, es poder obtener los elementos orbitales de la órbita Tierra-Luna a través del vector estado y también poder realizar el proceso inverso relacionando ambas formas de estudiar la órbita.

Antes de empezar con el desarrollo y estudio de los datos, es importante presentar algunos conceptos claves para su entendimiento. Es por ello por lo que primeramente se presentan las bases teóricas utilizadas en el apartado 2, después se presenta la base de datos utilizada en el apartado 3, a continuación, se estudian las variables disponibles y se trabaja con ellas para relacionarlas entre sí en este mismo apartado. En el siguiente capítulo, se muestra gráficamente el comportamiento de cada parámetro medido y un breve razonamiento de ese comportamiento. A continuación, en el apartado 5 se realizan las transformaciones presentadas en el capítulo 2 y se muestra el error cometido en ellas. Por último, se ha querido hacer una comparación con la base de datos de Wolfram Alpha y Mathematica, la cual es una aplicación con múltiples usos, siendo uno de ellos la astronomía, que es utilizada por un gran número de usuarios. Para finalizar el trabajo se han incluido unas conclusiones en las que se incluyen posibles ampliaciones y otros inconvenientes. Al final del documento se encuentra el anexo, un capítulo dedicado a información extra para la comprensión de ciertas partes del trabajo, sobre todo las relacionadas con el tratado de los datos. A continuación, se encuentran los capítulos de las referencias y la bibliografía.

2. ESTUDIO DE LA ÓRBITA LUNAR

El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra no es simple ni constante, ni su órbita es una elipse perfecta porque ni la Luna ni la Tierra son esféricas ni homogéneas para que esto suceda. La órbita de la Luna es un ejemplo de una órbita con perturbaciones, tanto por la influencia del Sol como por la de otros cuerpos del sistema solar.

Para comprender este sistema complejo, primero voy a abordar conceptos fundamentales que describen las órbitas en general para después ver cómo se aplica a la órbita en la que se involucran

la Tierra y la Luna. Con esto finalmente se podrán mostrar los resultados al estudiar la órbita con los datos disponibles.

2.1. ÓRBITA KEPLERIANA

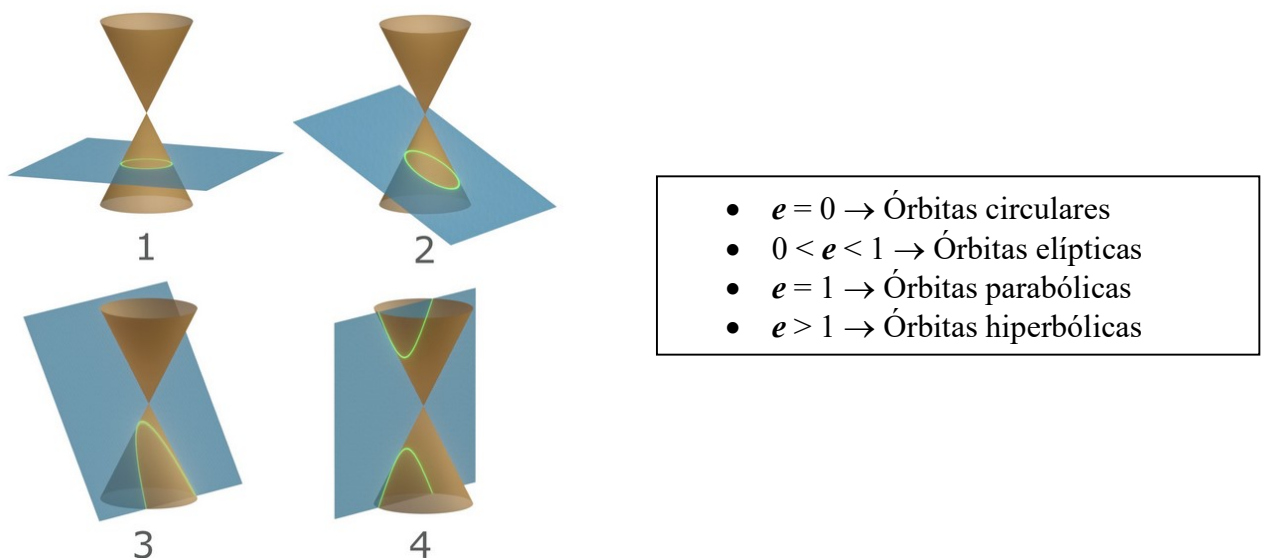
Las órbitas de los cuerpos celestes se modelan inicialmente como trayectorias elípticas ideales, de acuerdo con las leyes derivadas por Johannes Kepler. De manera simplificada se puede entender una órbita kepleriana como el movimiento de un cuerpo respecto a otro en un plano orbital de dos dimensiones en un espacio de tres (https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_orbit). Además, cualquier órbita con estas características puede ser parametrizada mediante 6 parámetros, denominados elementos orbitales los cuales se especificarán más adelante.

Como ya se ha comentado, no se tienen en cuenta las perturbaciones en el cálculo de la órbita, solo la atracción gravitacional de estos dos cuerpos. Además, se asumen cuerpos esféricos y homogéneos.

La trayectoria que describe el movimiento de un cuerpo alrededor de otro puede describir una elipse, parábola, hipérbola, circunferencia o incluso una recta, según el valor de la excentricidad de dicha órbita. La excentricidad puede definirse como un parámetro que mide lo que se desvía una órbita de ser una circunferencia perfecta y se identifica con e . Para que se describa una órbita circular, la excentricidad debe ser igual a 0, las órbitas elípticas la excentricidad toma valores entre 0 y 1, las parabólicas igual a 1 y las hiperbólicas valores superiores a 1. En la Figura 2 se muestra la forma de cada una, en el mismo orden en el que se han presentado.

Figura 2

Imagen de los tipos de órbitas de Kepler según el valor que tome la excentricidad e



Nota. Adaptado de Fig. 31 *The 4 types of conic section* [Imagen] por Bryan Weber (<https://orbital-mechanics.space/the-orbit-equation/the-orbit-equation.html>).

Concretamente, el movimiento que describen los cuerpos del sistema solar alrededor del Sol forma órbitas elípticas, de la misma manera que lo hace la Luna alrededor de la Tierra, por lo que será este tipo el que estudie.

2.2. LEYES DE KEPLER

Para poder formular matemáticamente el movimiento de los planetas alrededor del Sol Johannes Kepler enunció las conocidas como leyes de Kepler. Estas describen el movimiento orbital. Los enunciados de las leyes, presentados a continuación, y la Figura 3 que acompaña a la explicación y demostración de la segunda ley se han obtenido de la página web de Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_laws_of_planetary_motion). Aquí además se encuentra información más detallada y extendida de lo que se presenta en este documento.

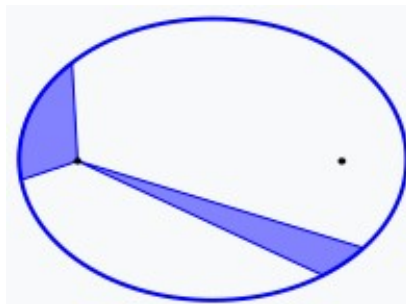
- **Primera Ley:** *Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse*
- **Segunda ley:** *El radio vector que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.*
- **Tercera ley:** *Para cualquier planeta, el cuadrado de su periodo orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.*

Para la primera ley Kepler observó los planetas durante varios años y pudo concluir que las órbitas que describían alrededor del Sol no eran circulares como se creía en aquel entonces, sino que eran elípticas. Haciendo observaciones y mediciones más detalladas, pudo concluir que, además, el Sol se encontraba en uno de los focos de dicha elipse.

La segunda ley es algo más compleja, pero indica que la velocidad de un planeta no es constante en toda la órbita, sino que varía según como de cerca o lejos se encuentre respecto al Sol. Cuando el planeta se encuentra en el punto más alejado del cuerpo central en la órbita (afelio cuando el cuerpo central es el Sol y apogeo para la Tierra) la velocidad es menor que cuando está en el punto más cercano (perihelio para el Sol y perigeo para la Tierra). A pesar de que la velocidad no sea constante, el hecho de que recorra áreas iguales en tiempos iguales, indica que el momento angular es constante, por lo que las órbitas son planas y estables, se recorren siempre en el mismo sentido y la fuerza que mueve los planetas es central. En la Figura 3 se muestra lo explicado.

Figura 3

Ilustración gráfica de la segunda ley de Kepler (en tiempos iguales, el planeta “recorre” áreas iguales)



Nota. Adaptado de *Representación gráfica de las leyes de Kepler.* [Imagen] (https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kepler).

Por último, la tercera ley se puede escribir matemáticamente de la siguiente manera, llamando T al periodo orbital, a a la longitud del semieje mayor y C la constante de proporcionalidad.

$$\frac{T^2}{a^3} = C = \text{constante} \quad (1)$$

Años más tarde, Isaac Newton estudió dichas leyes y le llevó a formular la Ley de Gravitación Universal. Gracias a esto, pudo relacionar esta ley con su propio estudio y dio valor a esa constante de proporcionalidad C .

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = C \quad (2)$$

A pesar de que las leyes de Kepler son suficientes para describir el movimiento de los planetas alrededor del Sol, no es suficiente para los conceptos más simples del movimiento lunar, que no pueden entenderse sin la atracción gravitacional tanto de la Tierra como del Sol, así como de otros planetas del sistema solar.

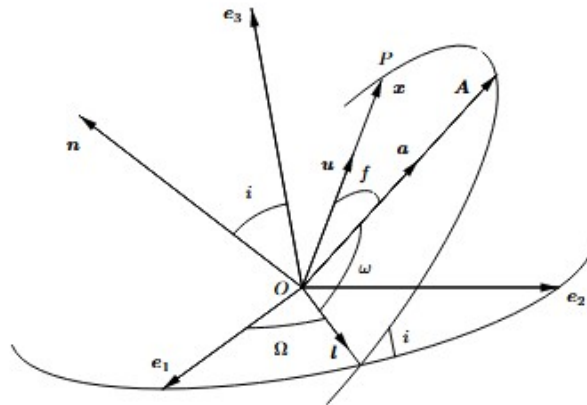
2.3. ELEMENTOS DE LA ÓRBITA KEPLERIANA

Una forma de representar el movimiento de un objeto es mediante un vector de posición y un vector de velocidad. En el caso de que el movimiento suceda en un espacio tridimensional, como es el caso que se estudia, cada vector tendrá un total de 3 componentes, una para cada eje x , y , z definidos para ese espacio. Una órbita generalmente se define por 6 elementos que se pueden calcular a partir de los vectores mencionados. Gracias a estos valores, se puede ver cómo es el movimiento de dicho cuerpo y por lo tanto se puede predecir la posición y velocidad que llevará en momento futuro.

A pesar de que hay varios elementos relacionados con la órbita y que la definen, son seis los esenciales para especificar matemáticamente una órbita. Los seis elementos orbitales se pueden dividir en tres grupos, según la información que den. Dos de ellos definen el tamaño y forma de la órbita, tres definen la orientación del plano orbital y el último define la posición del cuerpo en la órbita (https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%93rbita_de_Kepler). Algunos de ellos pueden ser sustituidos por otros valores, pero lo esencial es que se definan esas tres partes en el movimiento. Basándome en la Figura 4 y con la misma notación, presento los elementos y su significado.

Figura 4

Ilustración gráfica de los elementos orbitales de una órbita kepleriana



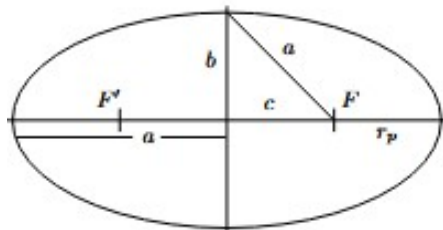
Nota. Adaptado de Figura 9.1 [Imagen] por Abad, A. A. (2012). *Astrodinámica*. Bubok Publishing S.L.

Los elementos que definen el tamaño y la forma de la órbita son:

- Semieje mayor (a). Este valor representa la mitad del diámetro más largo de una elipse, Figura 5. Cuando se habla de astronomía, como es el caso, también equivale a la distancia media de un cuerpo u objeto que orbita alrededor de otro. Este parámetro por lo tanto define el tamaño de la órbita.

Figura 5

Ilustración de la forma y elementos de una elipse



Nota. Adaptado de Figura 7.3 [Imagen] por Abad, A. A. (2012). *Astrodinámica*. Bubok Publishing S.L.

- Excentricidad (e). Parámetro que define la forma de la órbita. Su valor se ha explicado en el apartado 2.1, donde se ha visto la forma que tiene la órbita según este valor.

Por otra parte, los elementos que definen a orientación del plano orbital son:

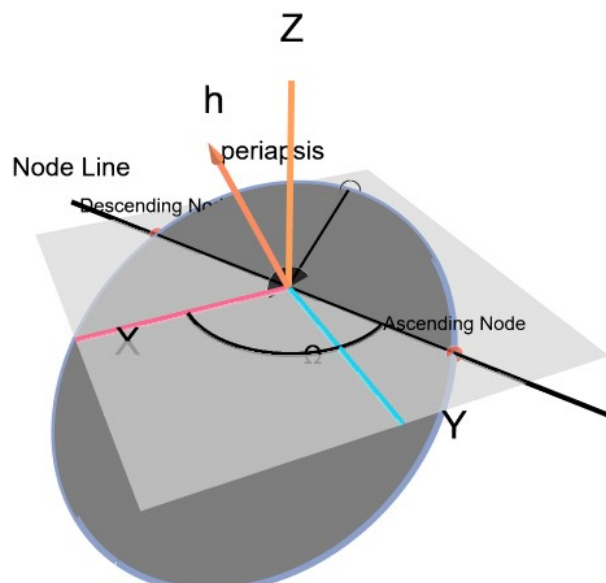
- Inclinación orbital (i). En este valor se mide el ángulo que forman el plano en que se inscribe la órbita y el plano de referencia.
- Longitud del nodo ascendente (Ω). Se considera una órbita inclinada en un ángulo i respecto el plano de referencia y se denomina *línea del nodo* a la intersección entre

dicho plano de referencia y el plano de la órbita. La órbita intersecciona con esta recta en dos puntos: el nodo descendiente, siendo este el punto donde el cuerpo pasa de estar por encima del plano de referencia a estar por debajo, y el nodo ascendente, siendo este punto el caso opuesto. La longitud o ascensión recta del nodo ascendente es la ascensión recta (véase más información de esto en la BIBLIOGRAFÍA) del punto donde el cuerpo orbitante se encuentra y el nodo ascendente o también es el ángulo desde el eje X del plano de referencia hasta el punto de corte con la órbita. En la Figura 6 se ve una representación de este concepto.

- Argumento del perigeo (ω). Define la distancia angular a lo largo de la órbita desde el nodo ascendente hasta el punto de perigeo.

Figura 6

Ilustraciones de la longitud del nodo ascendente (Ω) con sus parámetros



Nota. Adaptado de Fig. 45 [Interfaz] por Weber, Bryan, Obtenido de: <https://orbital-mechanics.space/classical-orbital-elements/classical-orbital-elements.html>.

Estos no son necesarios si se quiere discutir sobre el movimiento del objeto teniendo en cuenta solo el plano orbital, ya que son medidas angulares que definen orientación en relación con el espacio de referencia, si se estudia exclusivamente la trayectoria sin las perturbaciones o sin otros elementos estos tres parámetros pueden ser omitidos. Sin embargo, el estudio es muchísimo más completo con la presencia de ellos.

Finalmente, el último elemento que define dónde se encuentra el cuerpo u objeto en la órbita:

- Anomalía verdadera (v o f). Define la distancia angular a lo largo de la órbita desde el punto de perigeo hasta el punto en el que se encuentra el cuerpo. Este valor puede ser sustituido por otros valores alternativos, donde los más utilizados son la anomalía media (M) y el tiempo desde el perigeo (T).

Así como los elementos orbitales se pueden obtener a través de los vectores de posición y velocidad, estos últimos también se pueden obtener a partir de los elementos orbitales. Este paso y relación es una parte fundamental de este trabajo: comprender la relación entre ambas cosas, entender la complejidad del movimiento y órbita de la Luna, debido a todos los parámetros de su órbita y por las perturbaciones que esta sufre. Así, con los datos obtenidos voy a realizar ambas transformaciones y comparar mis cálculos con el conjunto de datos obtenido de la interfaz disponible en la página web de la NASA y así obtener el error cometido al hacer los cálculos. La elección y estudio de los datos se comenta a partir del apartado 3.

2.3.1. CÁLCULO DE LA ÓRBITA A PARTIR DEL VECTOR ESTADO

Es esencial conocer la manera de obtener elementos orbitales a través del vector estado y viceversa para poder tener la información más completa posible según las necesidades del estudio. En mi caso, he podido acceder a todos estos datos en dos ficheros diferentes desde la misma interfaz, lo que a priori me asegurará que los datos están medidos de la misma manera. Sin embargo, como es parte de este trabajo, voy a realizar ambos procesos. Como tengo además los datos reales medidos por la NASA, voy a poder hacer un estudio y comparación de los resultados que yo he obtenido con los medidos por ellos, lo cual va a favorecer al estudio.

Newton resolvió las ecuaciones diferenciales de la Ley de Gravitación Universal y a partir de ahí se resuelve el problema de los dos cuerpos, cuyas soluciones son cónicas. A partir de esto, se obtuvieron las fórmulas que utilizaré más adelante para pasar de unas coordenadas a otras y su relación con las efemérides.

En primer lugar, partiendo del vector estado voy a calcular los parámetros definidos en el apartado anterior. Para ello, he utilizado los cálculos especificados en el libro de Abad (2012), los cuales voy a incluir a continuación. En el libro se especifican los cálculos mucho más en detalle, además de incluir algunos casos especiales que puede ser importante según el estudio que se realice. Como en este caso no es necesario, solo voy a incluir lo esencial y lo que se aplica a mi caso de estudio concreto.

Se define el parámetro gravitacional estándar en la ecuación especificada inmediatamente debajo, siendo G la constante de gravitación universal, M la masa de la Tierra y m la masa de la Luna.

$$\mu = G (M + m)$$

Para el cálculo, se suponen conocidas la posición \mathbf{x}_o y la velocidad \mathbf{X}_o en un instante t_o y la constante μ . Entonces, se calcula la distancia r_o como la norma del vector \mathbf{x}_o . A continuación, se realizan los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \mathbf{x}_0 \times \mathbf{X}_0, & G &= \|\mathbf{G}\|, \\
\mathbf{A} &= \mathbf{X}_0 \times \mathbf{G} - \frac{\mu}{r_0} \mathbf{x}_0, & A &= \|\mathbf{A}\| \\
h &= \frac{1}{2} \mathbf{X}_0 \cdot \mathbf{X}_0 - \frac{\mu}{r_0}.
\end{aligned}$$

A partir de las constantes de integración obtenidas, G , que corresponde al vector momento angular y su módulo G , A , el vector de Laplace y su módulo A , y h , la energía, se pueden obtener la excentricidad (e), el semilatus rectum (p) y el semieje mayor de la órbita según si la excentricidad es mayor o menor que 1 (a).

$$e = \frac{A}{\mu}, \quad p = \frac{G^2}{\mu}, \quad a = \begin{cases} \frac{p}{1-e^2}, & \text{si } e < 1, \\ \frac{p}{e^2-1}, & \text{si } e > 1. \end{cases}$$

Con esto, ya son conocidas la forma y tamaño de la órbita, por lo que el siguiente paso es determinar la posición relativa de esta en el espacio. Para ello, primero se indica que es necesario calcular los vectores del sistema orbital ($\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{n}$) para $t = t_0$.

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{x}_0}{r_0}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{G}}{G}, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_0.$$

Una vez obtenidos estos valores, se puede obtener la inclinación y la longitud del nodo ascendente.

$$\begin{aligned}
i &= \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3), \\
\Omega &= \arctan(-\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2, \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1),
\end{aligned}$$

Como se conoce A y A , se puede obtener

$$\mathbf{a} = A/\Lambda \tag{3}$$

Para los dos últimos valores faltantes, el argumento del perigeo y la anomalía verdadera, se obtienen mediante la relación

$$(\omega + f_0) = \arctan(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_3, \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_3)$$

y la anomalía verdadera se puede obtener a partir de los vectores del sistema orbital

$$f_0 = \arctan(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_0, -\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_0),$$

lo que permite obtener ω con la relación anterior habiendo obtenido \mathbf{a} según la Ecuación 3. Con estos cálculos, se ha podido obtener los seis elementos orbitales esenciales de una órbita kepleriana.

2.3.2. CÁLCULO DE EFEMÉRIDES

El proceso contrario al realizado anteriormente es conocido como *cálculo de efemérides*. En este, se parte de los parámetros de la órbita para obtener tanto la posición como la velocidad en cada punto. Los cálculos los he obtenido de la misma fuente, del libro de Abad (2012).

Definiendo rotaciones elementales, como matriz de giro alrededor del eje $0x$, $0y$ y $0z$: R_1 , R_2 y R_3 respectivamente.

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores de posición y velocidad se pueden obtener

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega + f) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega + f) \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{f} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por último, siguiendo el libro en cada paso y realizando los cálculos necesarios, finalmente se obtiene la fórmula para calcular los elementos del vector posición

$$\begin{aligned} x &= (\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \cos i \sin(\omega + f)) r, \\ y &= (\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \cos i \sin(\omega + f)) r, \\ z &= \sin i \sin(\omega + f) r, \end{aligned}$$

y los elementos del vector velocidad

$$\begin{aligned} X &= (\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \cos i \sin(\omega + f))\dot{r} - (\cos \Omega \sin(\omega + f) + \sin \Omega \cos i \cos(\omega + f))r\dot{f}, \\ Y &= (\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \cos i \sin(\omega + f))\dot{r} + (-\sin \Omega \sin(\omega + f) + \cos \Omega \cos i \cos(\omega + f))r\dot{f}, \\ Z &= \sin i \sin(\omega + f)\dot{r} + \sin i \cos(\omega + f)r\dot{f}. \end{aligned}$$

Y, por último, las variables r , \dot{r} y \dot{f} se obtienen

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f},$$

y calculando

$$\mathbf{G} = \mathbf{x} \times \mathbf{X} = r^2 \dot{f} \mathbf{n},$$

$$r^2 \dot{f} = G = \sqrt{\mu p}.$$

Con esto, se puede obtener finalmente

$$\dot{r} = \frac{Ge}{p} \operatorname{sen} f,$$

De esta manera, se consigue el vector estado (los vectores posición y velocidad) a partir de los elementos orbitales, por lo que he obtenido una relación bidireccional entre ambos conjuntos de valores. El siguiente paso es aplicarlo a mi caso particular, realizando los cálculos con los valores concretos de mi conjunto de datos y poder calcular por una parte el error cometido y por otra estudiar la naturaleza de los elementos orbitales.

3. DATOS

La idea inicial era utilizar datos procedentes de un radiotelescopio en Letonia, por la relación entre la Universidad y la institución. Esto requeriría de mucho tiempo del cual no disponíamos, por lo que por problemas técnicos se ha decidido posponer este trabajo y finalmente no han podido ser utilizados. Ante esto, pude encontrar, descargar y utilizar un registro de datos de la página NASA's Archive of Space Geodesy Data (<https://cddis.nasa.gov/archive/>). En esta página se encuentran numerosas carpetas con información que puede ser relevante para diversos campos e investigaciones.

El propio fichero de información que se puede encontrar en esta misma página recoge todo el contenido de cada carpeta, como se muestra en la Figura 7, para poder encontrar y utilizar lo que se requiera en cada investigación. Algunas de las carpetas más interesantes contenían datos y productos relacionados con el sistema DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite), también otros relacionados con el sistema GLONASS (Global Navigation Satellite System), sistema de navegación por satélite ruso, VLBI (Very Long Baseline Interferometry), etc. En concreto, contiene una carpeta identificada como “/slr” donde se encuentran datos y productos relacionados con el SLR (Satellite Laser Ranging), que es una técnica de medición geodésica en la que se utilizan láseres para medir la distancia entre la Tierra y la Luna, a través de estaciones en la Tierra y reflectores ubicados en satélites, en este caso en la Luna. Además, existe una carpeta llamada “reports” que contiene archivos de reportes y correos, como informes técnicos o resultados de investigaciones relacionadas con los archivos que se encuentran en este directorio. Hay una carpeta igual en cada directorio posterior.

Figura 7

Imagen del contenido de la base de datos

```

Welcome to the CDDIS Anonymous FTP Archive

The main directories are:

/pub/doris      DORIS data and products
 /glonass      GLONASS data and products
 /gps          GPS data and products
 /slr          SLR data and products
 /vlbi         VLBI data and products

 /GSAC         Data files for the GPS Seamless Archive
 /egm96        NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model files
 /formats      Data format documentation
 /misc         Miscellaneous files
 /personnel    Address book
 /products     Submitted analysis products
 /reports      Various mail files and reports

Contact Carey Noll (Carey.Noll@nasa.gov) for further information.
*****
```

Nota. Fragmento del archivo que indica el contenido de cada carpeta y directorio en él.

Dentro de la carpeta con los datos de interés de este trabajo, se encuentran otros nuevos directorios: “*data*”, dos carpetas con archivos de predicción de satélites SLR en formatos CPF y TIRVs, “*products*”, “*slrmail*” y “*report*”. La carpeta que contiene productos derivados del SLR también contiene información importante como archivos de descripción de los centros de análisis ILRS y soluciones de estación y parámetros de orientación de la Tierra. La primera carpeta es la más completa de todas, y en la que se encuentra la información más relevante ya que contiene datos de rango láser satelital. Contiene:

- Datos de rango láser a tasa completa en distintos formatos, entre ellos “CRD” y “CRD V2”. Contienen archivos mensuales y diarios de un gran número de satélites, además de un resumen de estos mismos ficheros. Cada archivo se identifica por el nombre del satélite y la fecha: si es un resumen de un mes entonces se identifica con YYYYMM (siendo YYYY el año y MM el mes) y si es un archivo diario se identifica de manera similar YYYYMMDD (siendo DD el día).
- Datos de puntos normales (*normal points*) de SLR en los mismos formatos, que son versiones resumidas y filtradas de las mediciones. Aquí se encuentran archivos de puntos normales diarios, mensuales y anuales para numerosos satélites. Para identificar y nombrar los archivos de esta carpeta siguen el formato explicado anteriormente.
- Reportes o informes sobre los datos almacenados, así como resúmenes diarios, semanales, trimestrales, etc. de segmentos de pase de puntos normales de SLR por satélite. También contiene un directorio con datos relacionados con la sincronización y temporización del proceso.

Los directorios que he explorado y utilizado han sido los dos primeros mencionados. Sin embargo, estos contienen un gran volumen de datos por lo que para optimizar el proceso y sacar

máximo rendimiento al trabajo, se deben estudiar y seleccionar los satélites de los cuales obtener los datos y la información para poder calcular la distancia entre la Tierra y la Luna.

Entre los satélites que se encontraban en los archivos, los que más se adaptaban a mis necesidades y por lo tanto de los que finalmente extraje la información fue de Apollo 11, Apollo 14 y Apollo 15. Estos reflectores fueron instalados en la superficie de la Luna durante las misiones Apollo.

Después de haber identificado, escogido y descargado los archivos de datos que interesan para el cálculo de la distancia entre la Tierra y la Luna además de para la determinación y el estudio de la órbita de la Luna, se debe hacer una exploración del contenido de estos para saber qué tipo de información se incluye, cómo viene dada esta información y sobre todo cómo tratarla para poder utilizarla en el estudio.

De todo el directorio de datos, seleccioné dos tipos de archivos. En primer lugar, los datos de rango láser nombrados anteriormente de los tres reflectores seleccionados y, en segundo lugar, los datos de puntos normales. A pesar de que ambos tipos de documentos tienen una estructura y formato similares presentan información diferente.

Existe otra página de la NASA conectada con la primera, en la que se encuentran los datos, donde se recoge una explicación detallada del contenido de todos los documentos. La página pertenece concretamente a la sección *International Laser Ranging Service* (ILRS Data Format and Procedures Working Group, 2019). En esta, se detallan todas las posibles partes del archivo, así como cada posible valor que podría tomar y la relación que tienen esos valores con otros. Además, también se especifica en qué unidades o sistema de medición se utiliza en cada uno de los datos y registros que se especifican en el documento, lo cual es esencial para poder completar de manera óptima, precisa y real todos los cálculos que se van a necesitar para la realización de este trabajo. En general, el sistema de medición que se utiliza es el SI, Sistema Internacional de Unidades.

A pesar de tener la información que se necesita para poder realizar el estudio con el conjunto de datos presentado, finalmente no han podido ser utilizados, ya que, aunque contienen las variables indicadas y tienen un gran número de registros, estos están recogidos en un pequeño número de fechas. Después de recoger y tratar los datos, pude ver que contaba con 30272 instancias, instantes medidos, en tan solo 163 días diferentes a lo largo de más de 12 años. Esto significa que de media se tiene registros de aproximadamente un día al mes, lo que no es suficiente, ya que se requiere hacer un seguimiento claro de la órbita y poder encontrar patrones y anomalías en ella y teniendo aproximadamente un valor de cada órbita para ello es muy pobre.

Es por esto por lo que tuve que buscar otro conjunto de datos que contase con todo lo necesario para poder realizar mi investigación. Como ya había trabajado en profundidad con el conjunto de datos anterior y ofrecía información muy relevante e interesante, aunque no suficiente para el objetivo principal, quise seguir buscando en una página similar de la NASA, para de esta manera poder relacionar en cierta manera ambas y completar la información con ello.

Finalmente, di con una página: NASA Horizons. El nuevo conjunto de datos que voy a utilizar se obtiene de una interfaz web para generar efemérides topocéntricas. En esta página concretamente, se especifica paso a paso el proceso para poder generar Efemérides.

La aplicación web (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/>), o interfaz web, consta de 5 apartados principales, mostrados en la Figura 8 y explicados posteriormente.

Figura 8

Imagen de la interfaz

Horizons System

Save/Load Settings...	
1	Ephemeris Type: <input type="text" value="Observer Table"/>
2	<input type="button" value="Edit"/> Target Body: Mars
3	<input type="button" value="Edit"/> Observer Location: Geocentric [code: 500]
4	<input type="button" value="Edit"/> Time Specification: Start= 2024-10-26 UT , Stop= 2024-11-25 , Step= 1 (days)
5	<input type="button" value="Edit"/> Table Settings: <i>defaults</i>

After specifying settings above (items 1 to 5), generate an ephemeris by pressing the "Generate Ephemeris" button below. If

Nota. Imagen en la que se muestra la interfaz de la página Horizons System.

- *Ephemeris Type.* Esta opción sirve para seleccionar qué información se quiere acerca del cuerpo a observar y cómo se quiere esta información. Las opciones en el desplegable son *Observer Table*, que ofrece medidas (como la ascensión recta, la declinación o la dirección de movimiento respecto a varios cuerpos). Otra opción es *Vector Table*, que ofrece vectores cartesianos como por ejemplo coordenadas xyz en un sistema de referencia específico. La tercera opción para elegir es *Osculating Orbital Elements*, que ofrece medidas e información acerca de los elementos orbitales del cuerpo elegido en relación con el sistema de referencia seleccionado. Por último, *Small-Body SPK File* proporciona información específica sobre cuerpos pequeños.
- *Target Body.* En la segunda opción, se debe especificar con el botón “*Edit*” el cuerpo que se quiere observar. Hay varias maneras de especificarlo: se puede buscar directamente el cuerpo, se puede seleccionar desde una lista de cuerpos principales, se puede especificar también usando TLEs (normalmente para seleccionar un satélite artificial orbitando alrededor de la Tierra) y por último se puede especificar un cuerpo pequeño (asteroide o cometa) usando elementos (normalmente para cuerpos pequeños que no están disponibles vía Horizons).
- *Observer Location.* Este campo varía según lo seleccionado en el primero. Por ejemplo, si se selecciona *Observer Table*, se requerirá especificar *Observer Location*, pero si se selecciona *Vector Table*, entonces la tercera entrada será *Coordinate Center*. A pesar de que en cada caso se indican cosas diferentes en

este campo, la manera de buscar es en todas la misma. Por una parte, se puede especificar buscando una localización concreta, también se puede seleccionando desde una lista de localizaciones de la Tierra, especificando coordenadas o, por último, usando TLEs. Con esto, las parejas de selección de los campos primero y tercero se agrupan de esta manera:

- *Observer Table – Observer Location.*
 - *Vector Table – Coordinate Center.*
 - *Osculating Orbital Elements – Coordinate Center.*
 - *Small-Body SPK File – Coordinate Center.* Esta pareja de opciones requiere que se especifique en *Target Body* un cuerpo pequeño, ya que se entiende que es lo que se busca observar.
- *Time Specification.* En este campo se determina la magnitud del conjunto de datos que se quiere obtener, ya que se especifica las fechas de las que quieres sacar la información que se ha seleccionado en el resto de los campos. Se puede realizar de dos maneras: por una parte, se puede especificar una fecha de comienzo y otra de final para obtener datos desde una hasta la otra ambas incluidas y, por otra parte, se puede especificar una lista de fechas. En el primer caso, se debe tener en cuenta además que se debe determinar el salto entre fechas (“*step size*”), es decir cada cuánto se quiere generar una instancia o registro. En la Figura 9 se muestra un ejemplo.
 - *Table Settings.* Este último campo es el más completo. Aquí se cuenta con una serie de ajustes y especificaciones acerca de la información que se quiere de la disponible. Esta selección cambiará según lo que se haya elegido en el primer campo.

Una vez se tiene todo seleccionado, especificado y finalizado, se pulsa el botón verde en la parte inferior izquierda de la Figura 9 para generar el conjunto de datos personalizado. La interfaz ofrece una visualización completa de los datos sin necesidad de descargarlos.

Figura 9

Imagen de la interfaz en la selección del tiempo

Choose a method for specifying output times:

Specify time span ▾

Specify a Time Span

Start time: 2014-10-21 B.C. 9999-03-20 00:00 (min. for current target body)

Stop time: 2024-10-21 A.D. 9999-12-31 12:00 (max. for current target body)

Step size: 4 hours

Optional, select one of the preset from today to the indicated number of days later at 1-day steps.

10 day 30 day 60 day

Use Specified Time Span

- days
- hours
- minutes
- equal intervals (unitless)
- calendar years
- calendar months

Nota. Imagen en la que se muestra la interfaz de la página Horizons System.

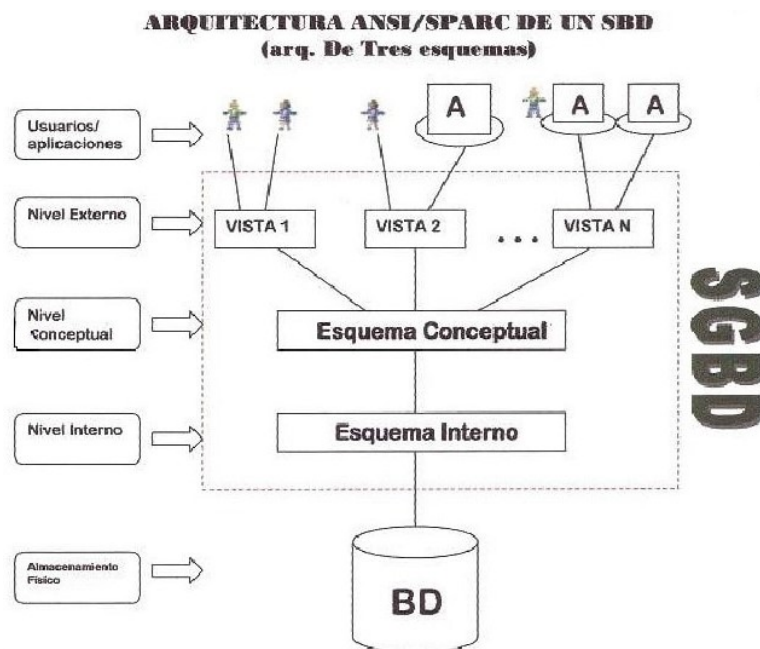
En la guía de uso de la interfaz, disponible en una página web relacionada (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/tutorial.html>), se ofrece más información y detalla cada parte. Además, consta de un ejemplo práctico (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/tutorial.html#example>) que sirve como base.

La interfaz web no ofrece información sobre cómo están organizados los datos para poder hablar de ellos desde un punto de vista más técnico. Sin embargo, se puede ver que esta es muy completa y que para realizar una consulta, es decir, generar cualquier conjunto de datos, es necesario especificar todos los parámetros explicados. El último, *Table Settings*, sirve para indicar los valores que se quieren obtener con lo seleccionado en cada punto anterior, por lo que todos estos se pueden entender como las claves y *Table Settings* la selección de variables de la tabla obtenida. Es probable que se trate de una base de datos que usa un modelo relacional ya que encaja con la forma de acceder a los datos y es el modelo más extendido. Este modelo trabaja principalmente con tablas, de tal manera que almacena los registros de diferentes tablas que pueden relacionarse por comparaciones de valores de los campos que contienen cada una de ellas, mediante campos comunes. Esto se conoce como *cruzar dos tablas*.

Atendiendo a los niveles de un sistema de bases de datos como se muestra en la Figura 10, este correspondería al nivel externo o de vista, sabiendo además que es un sistema gestor de bases de datos multiusuario ya que permite consultas de diferentes usuarios al mismo tiempo. Es una aplicación web muy completa y apta para cualquiera que necesite utilizarla ya que no necesita un Lenguaje de Definición de Vistas como otros sistemas, ejemplos en Tejada, E. C. (2015).

Figura 10

Esquema de un sistema gestor de base de datos



Nota. Se muestran los diferentes niveles. Imagen obtenida de YArquitectura (YArquitectura, s.f.).

3.1. CONTENIDO DE LOS DATOS

El objetivo principal del trabajo es calcular la distancia entre la Tierra y la Luna, observar patrones o anomalías y cambios y además poder determinar la órbita de la Luna y poder estudiarla para observar también aspectos destacables de su órbita.

Es por ello por lo que voy a generar dos conjuntos de datos, uno con el formato *Vector Table* para obtener la información sobre la posición y la velocidad, y otro con *Osculating Orbital Elements*, que me permitirá saber las especificaciones de la órbita lunar como explicaré más adelante. A pesar de contener informaciones muy diferentes, el formato de ambos ficheros es muy similar.

Para poder ver y explicar el contenido de los datos, debo antes especificar la selección de opciones realizada en los campos explicados. Para ello, dividiré en dos de tal manera que explicaré en cada uno un conjunto de datos diferente: el generado como *Vector Table* y el generado como *Osculating Orbital Elements*.

3.1.1. DATOS VECTOR TABLE

En primer lugar, tenemos los documentos que contienen datos de posición y velocidad como coordenadas cartesianas xyz. Seleccione primero el formato en el primer campo a continuación, seleccione el objeto a observar, en este caso la Luna, continúo seleccionando desde dónde o el sistema de referencia que quiero tomar para obtener mis datos y resultados, después seleccione el rango de fechas y cada cuánto y por último otros ajustes e información. Las especificaciones utilizadas son las que se muestran en la Figura 11.

Figura 11

Imagen de la interfaz en la selección del conjunto de datos del tipo *Vector Table*

The image shows a web interface for generating an ephemeris. It features a 'Save/Load Settings...' button at the top left. Below it are five numbered settings rows, each with an 'Edit' button:

- 1 Ephemeris Type: Vector Table
- 2 Target Body: Moon [Luna]
- 3 Coordinate Center: Geocentric [code: 500]
- 4 Time Specification: Start=2014-10-21 TDB , Stop=2024-10-21, Step=4 (hours)
- 5 Table Settings: custom

Below the settings is a note: "After specifying settings above (items 1 to 5), generate an ephemeris by pressing the 'Generate Ephemeris' button below corresponding to the settings above can be viewed by using [this link](#)." At the bottom is a green 'Generate Ephemeris' button.

Nota. Imagen en la que se muestra la interfaz de la página Horizons System.

He escogido un periodo de 10 años con un registro cada 4 horas, lo que hace un total de 6 registros cada día. Se ha elegido de esta manera para que sea un conjunto lo suficientemente pequeño como para poder trabajar con ellos de manera rápida pero lo suficientemente grande como

para poder ver patrones en las órbitas y en el comportamiento de la Luna a lo largo de los días, meses y años.

Además, es importante que el cuerpo central, “*Coordinate Center*”, sea el especificado en la imagen si lo que se quiere es realizar un estudio como este, ya que, si se utiliza una ubicación de un observatorio o una ciudad, se verán pequeñas oscilaciones al graficar la distancia a lo largo del tiempo. Esto se debe a que no se calcula la distancia desde el centro de la Tierra, sino desde la superficie. Concretamente, el cuerpo central de la Tierra se puede buscar por su código de esta manera: “@399” o escribiendo “Geocentric”, ya que, si se busca “Earth” o similares, aparece un observatorio y se tendría el problema presentado.

Continuando con las selecciones, concretamente en el último campo, los ajustes determinados se pueden observar en la Figura 12.

Figura 12

Imagen de la interfaz en la selección de los ajustes personalizados de Vector Table

Select Output Quantities

2. State vector {x,y,z,Vx,Vy,Vz} ▾

Statistical Uncertainties — comets and asteroids only

Select one or more of the following coordinate systems for output of uncertainties in the selected output quantities (position or position and velocity).

- XYZ uncertainties (ICRF or FK4/B1950)
- ACN uncertainties (along-track, cross-track, normal)
- RTN uncertainties (radial, transverse, normal)
- POS uncertainties (plane-of-sky; radial, RA, and DEC components)

Additional Table Settings

Reference frame: ?	ICRF ▾
Reference plane: ?	ecliptic x-y plane derived from reference frame (standard obliquity, inertial) ▾
Vector correction: ?	geometric states ▾
Calendar type: ?	Mixed ▾
Output units: ?	km and seconds ▾
Vector labels: ?	<input checked="" type="checkbox"/>
Output TDB-UT: ?	<input type="checkbox"/>
CSV format: ?	<input type="checkbox"/>
Object summary: ?	<input checked="" type="checkbox"/>

Nota. Imagen en la que se muestra la interfaz de la página Horizons System.

El formato del archivo está estructurado de tal manera que al inicio hay algunos datos, especificaciones e información de interés más general o medidas a tener en cuenta respecto al documento generado. La segunda parte es la que contiene los datos para los cuales se ha seleccionado en los distintos campos los diferentes ajustes. Finalmente, después de esto se encuentra la información con el contenido y explicación de cada variable y dato que aparece en el documento, incluyendo las unidades en las que se recogen, en este caso la posición está medida en km y la velocidad en km/s. La parte de los datos comienza con la fecha y a continuación el nombre

de la variable seguido por el valor que toma en la fecha y hora especificado en ese registro. Todas las variables que se encuentran debajo de una fecha pertenecen a ese mismo momento (o son medidas que se recogieron en ese mismo momento) hasta la aparición de la siguiente fecha, que da a entender que a partir de ella se especificarán medidas recogidas en este segundo momento.

Para ilustrar y explicar más detalladamente cada parte, voy a incluir pequeños fragmentos del documento en el [ANEXO](#) y a explicar principalmente la segunda parte de este. Con esto, una vez se ha descargado el conjunto de datos, ya se puede tratar, organizar y utilizar.

3.1.2. DATOS *OSCULATING ORBITAL ELEMENTS*

Por otro lado, este tipo de conjunto de datos contienen información relacionada con las órbitas. Según la configuración que se elija, se obtienen valores diferentes. En este caso, queremos obtener los elementos orbitales definidos en una órbita kepleriana, para órbitas elípticas.

Uno de los puntos más interesantes de este proyecto es trabajar con los datos en ambos sentidos y poder relacionar el vector de estado con los elementos orbitales, calculando uno a través del otro para después poder compararlo con el conjunto de datos obtenido en la interfaz nombrada para observar el error cometido entre otras cosas. Es por ello por lo que es importante que los registros sean de las mismas fechas que los del conjunto de datos anterior para que los cálculos se puedan comparar de manera lo más exacta posible. A continuación, en la Figura 13, se especifica la configuración seleccionada.

Figura 13

Imagen de la interfaz en la selección del conjunto de datos del tipo Osculating Orbital Elements

Save/Load Settings...

1	Ephemeris Type: <input type="text" value="Osculating Orbital Elements"/>
2	<input type="button" value="Edit"/> Target Body: Moon [Luna]
3	<input type="button" value="Edit"/> Coordinate Center: Geocentric [code: 500]
4	<input type="button" value="Edit"/> Time Specification: Start= 2014-10-21 TDB , Stop= 2024-10-21 , Step= 4 (hours)
5	<input type="button" value="Edit"/> Table Settings: <i>defaults</i>

After specifying settings above (items 1 to 5), generate an ephemeris by pressing the "Generate Ephemeris" button below. corresponding to the settings above can be viewed by using [this link](#).

Nota. Selección de la interfaz para generar el segundo documento, de donde se obtienen los elementos orbitales.

En primer lugar, el tipo de efeméride que buscamos ha cambiado por lo que cambiaremos la selección de “Vector Table” por “Osculating Orbital Elements”. En segundo lugar, el cuerpo objetivo y el central son los mismos por lo que “Target Body” y “Coordinate Center” serán “Moon [Luna]” y “Geocentric” respectivamente. Como he indicado anteriormente, el rango de fechas utilizado será el mismo. Finalmente, los ajustes utilizados serán los que se muestran por defecto.

Una vez generados y descargados los datos podemos observar que el formato del archivo está estructurado de una manera muy similar al anterior. Al inicio se encuentran las especificaciones de ambos cuerpos y medidas relacionadas con la masa, la órbita, etc. De nuevo, la segunda parte es la que contiene los datos con los que se va a tratar. Para finalizar el documento, se vuelve a incluir la información sobre el contenido del fichero, explicando cada registro y las unidades en la que se mide cada uno, siendo los ángulos en grados, las distancias en km, el tiempo de perigeo en número de días Juliano y el periodo de órbita sideral en segundos.

La estructura del cuerpo, la parte de los datos, es igual que el fichero anterior solo cambiando las variables que se encuentran en ella. Si llamamos “registro” a las medidas recogidas en cada fecha especificada podemos ver que de nuevo cada registro comienza con la fecha en la que se han recogido las variables e inmediatamente después se encuentran dichas medidas. Cuando se llega a otra fecha es cuando se cambia de registro. De nuevo, voy a incluir fragmentos de cada parte del documento incluidas en el [ANEXO](#). Una vez ya se tienen ambos conjuntos de datos, se deben tratar y organizar para trabajar con ellos de una manera óptima. A continuación, se explica este proceso.

3.2. LECTURA Y ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Una vez explorado y comprendido el contenido de los datos, se debe seleccionar qué partes se van a utilizar, lo cual se ha hecho durante la explicación de cada parte de los ficheros. El siguiente paso es entonces organizar de una manera más accesible e intuitiva los datos y registros que se van a utilizar.

Para la lectura de datos realicé un código en *Python* con las librerías *pandas*, *os*, *mimetypes* y *datetime*. El código lo dividí en tres partes principales: la primera con la apertura y lectura de los ficheros descargados, utilizando la librería *os*, segundo seleccionar y registrar la información de cada documento y guardarla en diferentes colecciones para organización en *Python*, y por último convertir y almacenar la información en un *DataFrame* con la ayuda de la librería *pandas* y guardarlo en el directorio del ordenador en formato *csv* para su uso posterior.

Este proceso es sencillo, utilizando las funciones *listdir()* y *path.isfile()* del directorio *os*, se leen y exploran los ficheros descargados y también se identifica que tipo son o que extensión o formato tienen. Cuando se han identificado de qué ficheros hay que extraer la información se utiliza *open()* para abrir el archivo y *readlines()* para poder acceder al contenido. Una vez hecho esto, solo se debe saber qué contiene cada fila y parte, que sabemos que están precedidas por un índice o identificador separando la parte inicial, de los datos y de la parte final con la explicación, y saber en qué orden o posición se encuentra cada valor concreto. Toda esta información está explicada en la sección [3.1.1](#) y en la sección [3.1.2](#). Cuando ya se han registrado todas las variables que se desean, yo registré cada valor en un diccionario siendo el nombre de cada identificador el nombre de las variables que iba a tener el *DataFrame* creado más tarde para, de esta manera, facilitar la conversión. Cada uno de estos diccionarios corresponderá a una instancia o fila en el conjunto de datos que se guardará. Esto a su vez se guarda en una lista, que tendrá, en orden, todas las instancias registradas. He incluido fragmentos de código donde se registra la información de ambos

documentos en el ANEXO, así como un pequeño fragmento de los ficheros resultantes como ilustración para comprender mejor el tratado de los mismos.

3.3. TRANSFORMACIÓN DE LOS DATOS Y CÁLCULO DE VARIABLES

Una vez realizado ese trabajo de exploración, limpieza y organización de los datos, ya se puede comenzar a trabajar con ellos para obtener las conclusiones deseadas. A partir de este momento, se utiliza el archivo de datos nombrado en el apartado anterior, creado desde la base de datos en el que se encontraba toda la información.

El siguiente paso es transformar cada variable en su tipo correspondiente, para asegurarse de que se tratará a cada tipo de dato según su forma y no de manera errónea. También se deben calcular variables necesarias y estudiar los valores que toman cada una de ellas, para ver si todos los datos recogidos se encuentran entre los valores esperados o si, por el contrario, se tiene presencia de posibles *outliers*, que son muestras que toman valores muy alejados del resto de muestras del conjunto de datos. En este caso también se pueden identificar como valores alejados de los valores esperados según cada variable.

Este proceso lo he realizado completamente en el programa *RStudio* ya que es una fuerte herramienta de tratado y visualización de datos, que es justo lo que se necesita a continuación. El primer paso es simple: convertir en formato fecha la variable *Fecha*, con la función *ymd_hms()* de la librería *lubridate*, y ordenar los datos según la fecha para tener todos los valores en orden cronológico.

En primer lugar, el estudio se centra en el estudio de la distancia entre la Tierra y la Luna, para después poder estudiar los elementos orbitales y poder realizar el cambio del vector estado a estos y viceversa. Es por ello que, respecto a las variables a calcular, primero se debe estudiar la distancia, utilizando el primer conjunto de datos obtenido el que recoge información sobre el vector estado, es decir, la posición y velocidad en los tres ejes xyz. Más adelante, se realizarán los cálculos y transformaciones necesarias en ambos conjuntos de datos para poder obtener los elementos orbitales en el primer *dataset* y, por otro lado, para obtener el vector posición y el vector velocidad en el segundo caso.

3.3.1. CÁLCULO DE LA DISTANCIA TIERRA-LUNA

Hay varias maneras de poder calcular la distancia entre la Tierra y la Luna, basándose en la geometría Euclídea o en velocidad de rango láser, entre otros. Al ser la luna el satélite natural de la Tierra ha sido objeto de atención desde hace muchísimos años. Es por ello por lo que calcular la distancia entre ambos cuerpos se ha estudiado en numerosas ocasiones en diferentes partes del mundo. Desde el Renacimiento, se han hecho grandes avances en cuanto a la ciencia se refiere, por lo que se han encontrado nuevos métodos para calcular las distancias entre otros cuerpos celestes, no solo la Luna (Trivedi, 2023).

Una de las formas de calcular la distancia es a través de datos obtenidos de láseres que miden el tiempo de vuelo desde estaciones en la Tierra y reflectores ubicados en la Luna. Esto es

conocido como por su uso en el *Lunar Laser Ranging (LLR) project*. Para ese caso, se debe tener en cuenta que el espacio entre dos cuerpos se calcula con el producto de la velocidad por el tiempo. Sabiendo que la velocidad del láser será la velocidad de la luz y que, además, el tiempo de vuelo se debe dividir entre dos, ya que se mide el tiempo de ida y vuelta desde la estación hasta el reflector y la vuelta al punto de partida. Por último, como tanto el emisor como el receptor están en la superficie y la distancia entre dos astros se mide desde el centro de ambos, se debe añadir el radio tanto de la Tierra (R_{Tierra}) como de la Luna (R_{Luna}), siendo 6371 km y 1737.4 km respectivamente. Las fórmulas se incluyen a continuación.

$$espacio = velocidad * tiempo \quad (4)$$

$$distancia_{Tierra-Luna} = \frac{tiempo\ de\ vuelo}{2} * velocidad + R_{Luna} + R_{Tierra} \quad (5)$$

Otra de las formas de calcular la distancia Tierra-Luna es con las coordenadas cartesianas (X, Y, Z) y utilizando la distancia Euclídea. Debido al tipo de datos de los que dispongo, esta es la manera que emplearé para calcularla. El cálculo es simple:

$$distancia_{Tierra-Luna} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (6)$$

Siguiendo la Ecuación 6 añadiendo todos los valores en las mismas medidas, se crea una nueva variable en el conjunto de datos. Para comprobar que el cálculo se ha realizado correctamente, hago un breve estudio de los valores obtenidos, observando si hay valores anómalos o si se puede observar algo inusual. Como se verá en el siguiente apartado, los valores se encuentran en el rango esperado y varían progresivamente de un valor al siguiente. Para estudiar la amplitud en la que se encuentra la distancia, se puede fácilmente calcular el máximo y el mínimo de esta nueva variable creada para asegurarse de que se encuentran entre los valores esperados y, finalmente, concluyo que el cálculo se ha realizado correctamente.

4. INTERPRETACIÓN Y GRÁFICAS DE LAS VARIABLES

Una vez se tienen los datos tratados y se han creado las variables de interés, se pueden realizar múltiples estudios. En primer lugar, es importante tener un primer vistazo de las variables para saber con qué se trabaja y poder manejar cada variable y concepto de la manera correcta.

Es por ello por lo que las primeras visualizaciones que presento son las que corresponden a las variables obtenidas de la interfaz.

4.1. EL VECTOR ESTADO Y LA DISTANCIA TIERRA-LUNA

En el primer conjunto de datos, las variables obtenidas desde la aplicación web son la posición y la velocidad en cada eje. Para que la representación sea clara y se distingan propiamente

las diferencias entre cada uno de los valores, voy a seleccionar un subconjunto de los datos ya que, si se hace una representación con todos ellos al mismo tiempo, la comparación podría no ser tan clara a simple vista, que es el principal objetivo de esta comparación con gráficos. Además, los límites se han establecido iguales para cada grupo de gráficos, de tal manera que la comparación pueda realizarse y para que sea fiel. El subconjunto seleccionado es el mes de junio del año 2017, por lo que se observarán los cambios de cada variable a lo largo de todo un mes. Dichas gráficas se pueden observar en las Figuras 14, cambios en la posición en cada eje, y 15, cambios en la velocidad en cada eje.

Figura 14

Gráficas de la posición a lo largo del mes de junio de 2017



Nota. La imagen presenta las gráficas de los valores de la posición de la Luna respecto a la Tierra en los ejes X, Y y Z respectivamente.

Figura 15

Gráficas de la velocidad a lo largo del mes de junio de 2017



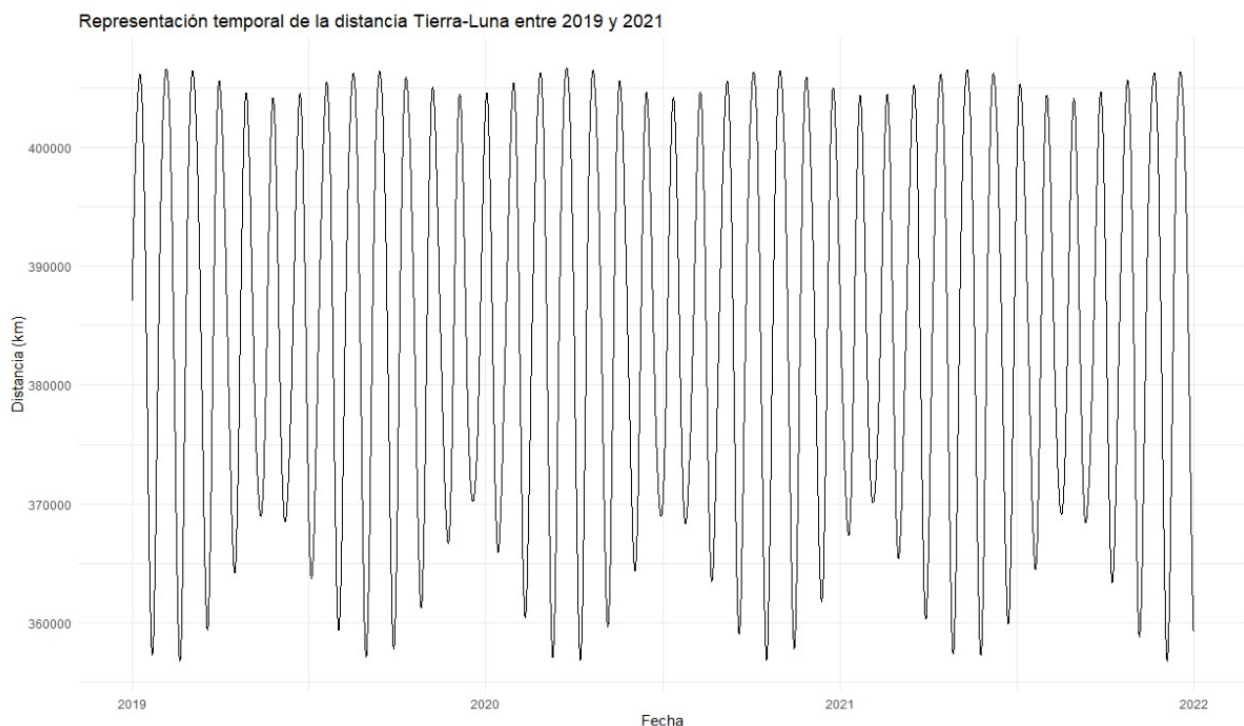
Nota. La imagen presenta las gráficas de los valores de la velocidad de la Luna respecto a la Tierra en los ejes X, Y y Z respectivamente.

El hecho de que la velocidad no sea constante en ninguno de sus ejes, como se ve en la Figura 15, se explica con la segunda ley de Kepler. Que la posición no sea constante parece más que evidente ya que es justo el objetivo del estudio: observar el movimiento de la Luna respecto a la Tierra. Además, se puede observar cómo tanto la posición como la velocidad en el eje z apenas varía en comparación a los otros dos ejes, lo que nos indica que la inclinación de la órbita no varía demasiado. La inclinación de una órbita se define como el ángulo entre el plano de dicha órbita y el plano de referencia, como se ha explicado más en profundidad al inicio del trabajo.

A continuación, se muestran representaciones de la distancia entre la Tierra y la Luna en diferentes formatos. En primer lugar, tenemos una gráfica que recoge la distancia que separa ambos cuerpos a lo largo de los días en todo el periodo seleccionado al generar los datos, es decir, 10 años. Lo que se quiere ver aquí es un patrón claro que hará referencia a la finalización de cada órbita y ver cómo se comporta una órbita respecto a las demás. Sin embargo, como los datos de los que dispongo son numerosos, realicé este mismo estudio para un subconjunto más reducido y así poder distinguir mejor las características a observar. A continuación, en la Figura 16, se muestra una imagen que corresponde a la representación temporal entre 2019 y 2021 de la distancia que separa a la Tierra de su satélite.

Figura 16

Gráfica de la distancia entre la Tierra y la Luna entre los años 2019 y 2021



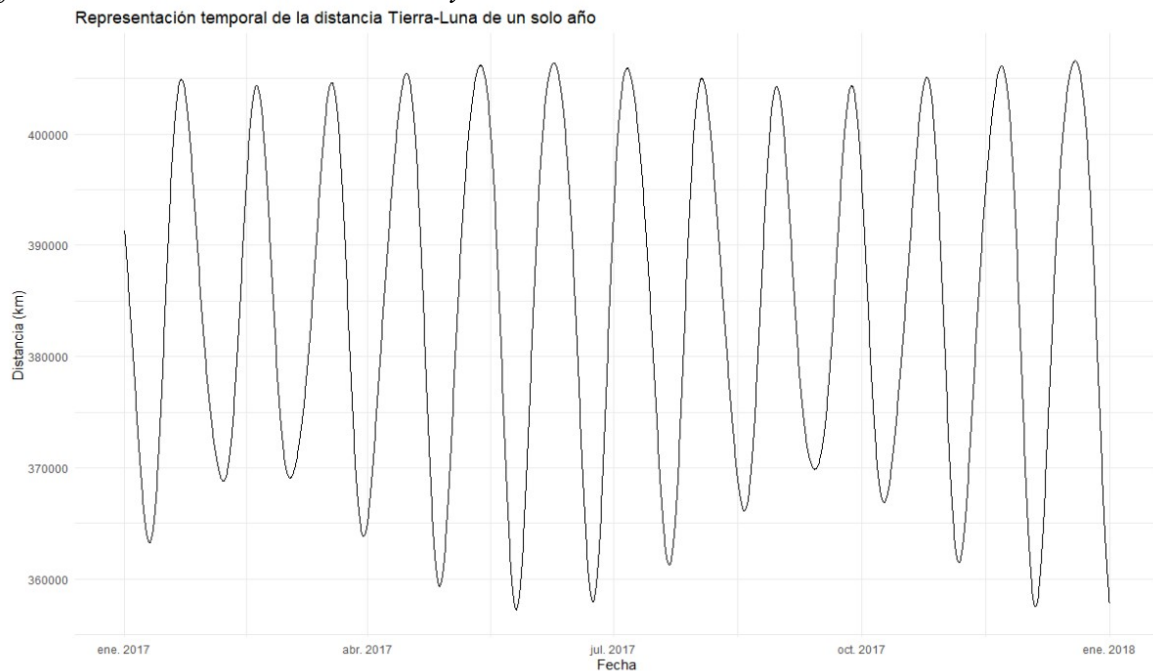
Nota. La gráfica muestra la distancia que existe entre el punto central (tomado la Tierra) y el cuerpo objetivo, en este caso la Luna, a lo largo de 4 años.

Con esta gráfica con un conjunto de datos más reducido, se puede observar principalmente dos cosas: el primer concepto que se ve es cómo aumenta la distancia hasta que llega a un máximo

y después vuelve progresivamente a un punto mínimo similar al anterior, y lo segundo que se puede observar es como van progresivamente aumentando y disminuyendo los máximos, pero de manera más pronunciada los mínimos a lo largo del año de forma cíclica. Este fenómeno se puede ver más claro con la representación de un solo año. Para el ejemplo, en la Figura 17 selecciono el año 2017.

Figura 17

Gráfica de la distancia entre la Tierra y la Luna en el año 2017



Nota. La gráfica muestra la distancia que existe entre el punto central (tomado la Tierra) y el cuerpo objetivo, en este caso la Luna, a lo largo de un año.

Si se consideran la Tierra y la Luna como masas puntuales o esferas homogéneas y la Luna girase alrededor de la Tierra influenciada únicamente por la atracción terrestre, la Luna se movería en una elipse perfecta, por lo que las órbitas serían idénticas entre ellas. Esto sabemos que no es así, ya que ni la Luna ni la Tierra son esféricas y, además, la Tierra no es homogénea tampoco. Además, existen otros planetas y estrellas que perturban la órbita descrita por el satélite. Todo esto hace que el movimiento global sea complejo y explica las fluctuaciones. La Luna, aunque sigue una órbita aproximadamente elíptica, presenta variaciones que son cruciales para entender su dinámica.

Parte de eso se ve reflejado en la Figura 17, donde se observa como la amplitud de la distancia varía en algunos periodos del año. Lo más notable es la forma en la que varía la distancia mínima de cada órbita, siendo esta más pequeña entre febrero y mayo y entre agosto y noviembre. Esto está relacionado con la influencia gravitacional del Sol en la órbita de la Luna, fenómeno conocido como precesión apsidal, es decir, una rotación gradual en la línea que conecta el perigeo con el apogeo (NASA Science Editorial Team, 2024). Concretamente, el efecto que tienen en esos meses concretos es debido a la orientación de la órbita lunar respecto al Sol. La órbita de la Luna alrededor de la Tierra no es perfectamente una elipse y está inclinada respecto al plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, por lo que todo esto en conjunto provoca ciertos cambios. Cuando el

eje está alineado de forma favorable respecto al Sol, las diferencias entre la distancia en el perigeo y en el apogeo son mayores y, en el caso contrario, disminuyen. Se puede encontrar más información en la entrada relacionada con esto en Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Precesi%C3%B3n_apsidal).

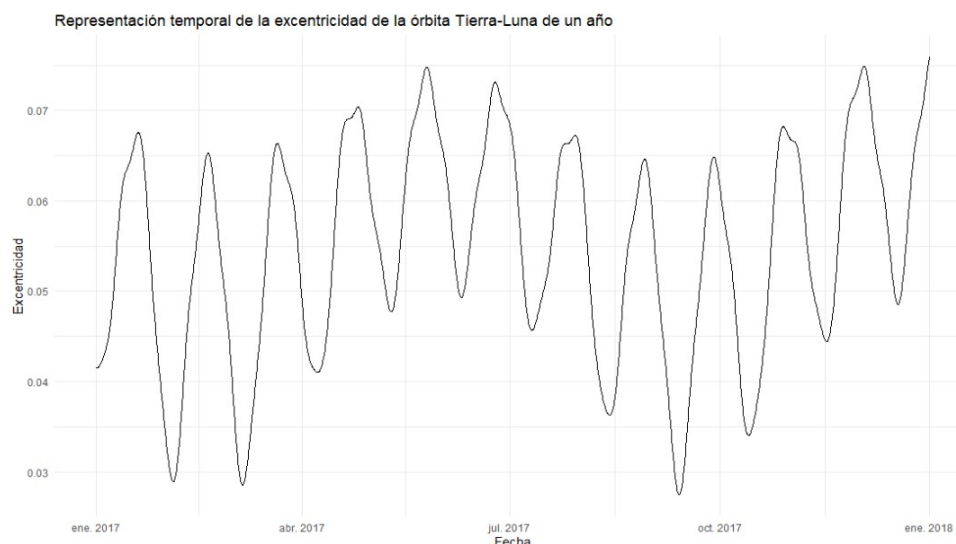
4.2. LOS ELEMENTOS ORBITALES DE LA ÓRBITA LUNAR

Antes de hacer los cálculos y procedimientos explicados en el apartado 2.3.1, es necesario además de saber y entender qué es cada elemento orbital, ver de manera práctica cómo se comportan. Esto es necesario porque, como es sabido, la órbita lunar no es regular ni puramente teórica. El Sol además del resto de planetas del Sistema Solar, influye notablemente en el comportamiento de la Luna alrededor de la Tierra, porque no solo siente la atracción gravitacional de este último cuerpo, sino de todos los anteriores también. Esto hace que el estudio de la órbita sea mucho más complejo y completo, ya que los elementos orbitales, como vamos a ver no son constantes, sino que cambian constantemente. Para ello, vamos a utilizar el documento de datos recogido de la interfaz de la NASA que previamente se ha organizado.

En primer lugar, es importante ver cómo se comportan los elementos que definen la forma de la órbita. La excentricidad define como de alejada está la elipse (porque sabemos que la órbita de la Luna es una elipse) de un círculo perfecto. En la Figura 18 se ve cómo cambia el valor de la excentricidad a lo largo de un año. Como en las otras gráficas, he seleccionado el año 2017 para poder observar con más claridad el comportamiento de cada parámetro. Que la gráfica no tome un valor constante indica que la elipse que forma la Luna alrededor de la Tierra es cambiante durante su movimiento. Los valores se encuentran entre 0.02745324 y 0.07595133.

Figura 18

Grafica que muestra la excentricidad durante el año 2017



Nota. El valor de la excentricidad no es constante.

Si se compara con la Figura 17 donde se observa cómo varía la distancia a lo largo de este mismo año, se puede ver como la excentricidad es menor entre mayo y septiembre y entre noviembre y febrero, que coincide con los momentos donde la distancia menor entre la Tierra y la

Luna de cada órbita completa es mayor. Esto es lo esperado. La relación entre la excentricidad, el semieje mayor de una elipse y la semidistancia focal (c en la Figura 5) de una elipse se define en la Ecuación 7.

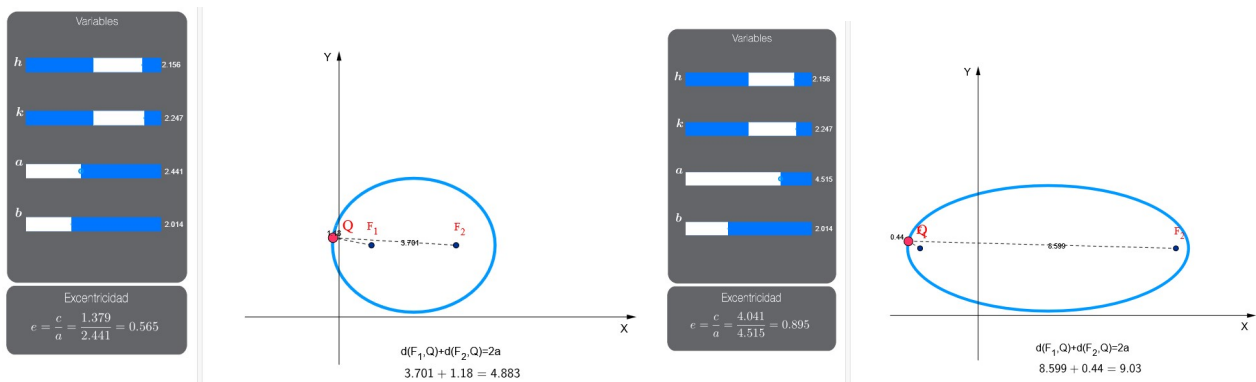
$$e = \frac{c}{a} \tag{7}$$

Matemáticamente, si la excentricidad aumenta teniendo en cuenta estos parámetros se puede deber a dos razones (considerando uno de los semiejes constante): la primera es que el semieje mayor sea constante y, por lo tanto, que aumente la semidistancia focal, esto se deberá a que disminuye el semieje menor b , por la relación ($a^2 = b^2 + c^2$), y la segunda es que el semieje mayor aumente, el semieje menor sea constante y por la misma relación la semidistancia focal aumente. Si no se consideran ninguno de los dos semiejes constantes, la explicación es mucho más extensa y se deben considerar más casos. Para esta situación concreta conviene considerar solo los explicados.

En este caso de estudio, interesa saber que una de las consecuencias de que la excentricidad sea mayor es que la distancia entre el foco y el punto más cercano de la órbita a él es menor (ver Figura 19). Esto explica porque cuando la excentricidad es mayor la distancia mínima entre la Tierra y la Luna es menor.

Figura 19

Ilustraciones de dos elipses a las que le varía la excentricidad, 0.565 y 0.895 respectivamente



Nota. Adaptado de *Excentricidad [Interfaz]* por Castillo C, Kory (2017), Obtenido de Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/ZnAmaDV6>.

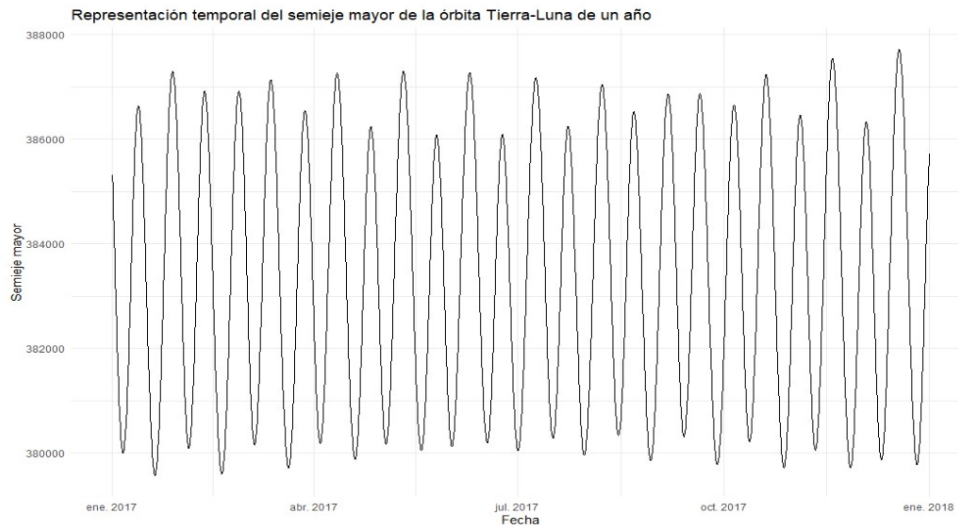
Para ver cuál es el comportamiento exacto de la órbita y cuál es la razón de esas variaciones, es necesario identificar si se debe al aumento del eje mayor o la semidistancia focal. Esto se puede observar en la Figura 20, donde se grafica los valores del semieje mayor en el mismo año.

En esta gráfica se puede ver como la variación es más o menos igual a lo largo de todo el año, por lo que la explicación en la variación debe estar en el cambio de la semidistancia focal. Para

ello, utilizo la relación entre estos tres elementos, calculo este valor a lo largo del año 2017 y se obtiene la gráfica de la Figura 21. Aquí se ve como esta es la razón que más influye en el cambio de la excentricidad.

Figura 20

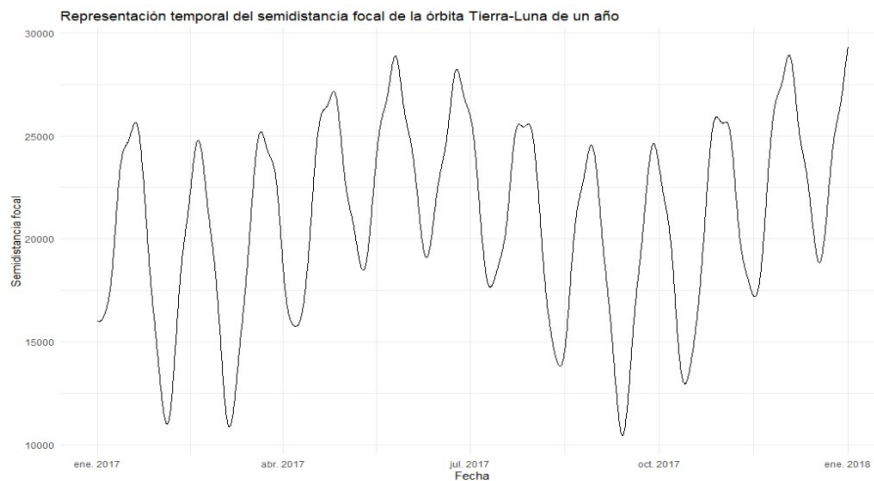
Gráfica que muestra el semieje mayor durante el año 2017



Nota. El valor del semieje mayor no es constante y su amplitud no varía según lo comentado.

Figura 21

Gráfica que muestra la semidistancia focal durante el año 2017



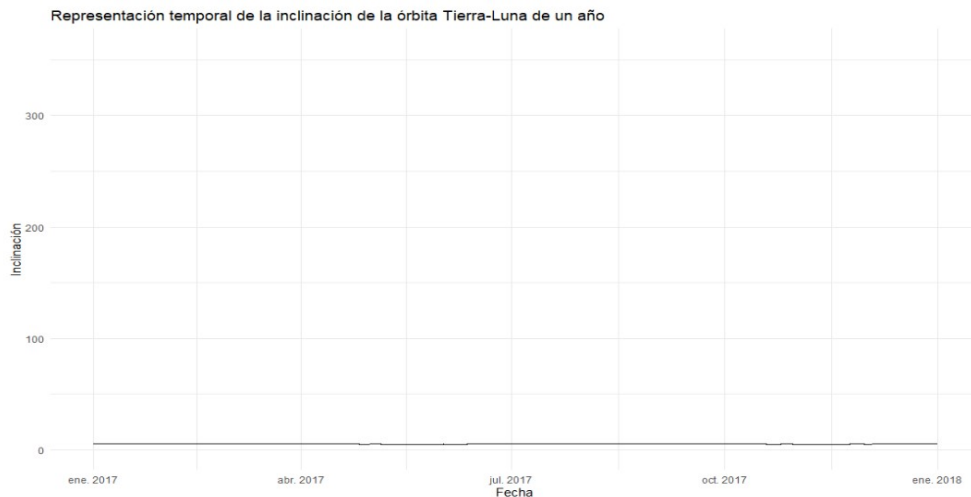
Nota. El valor de la excentricidad varia de manera similar a la semidistancia focal porque el semieje mayor cambia de manera más o menos constante durante todo el año.

Una vez se ha estudiado como se comporta la forma de la órbita, es conveniente estudiar el comportamiento de esta en relación con el sistema de referencia. Esto es la inclinación, la longitud del nodo ascendente y el argumento del perigeo. Como los parámetros son ángulos que están

medidos en grados, para hacer una comparación real, el eje y donde se representan los valores irán desde los 0° hasta los 360° y de nuevo se graficará a lo largo del año 2017. En primer lugar, la inclinación se muestra en la Figura 22. Como ya se había comentado al ver la variación de la posición de la Luna respecto a la Tierra en el eje z, la inclinación cambia muy poco. Si se grafica con límites en el eje y, apenas se ve cambio. La Figura 23 muestra esta misma gráfica ajustando el eje y a los valores que toma la inclinación, siendo estos entre 4.996455° y 5.288828° .

Figura 22

Grafica que muestra la inclinación durante el año 2017



Nota. La variación apenas es notable en la escala de 0° a 360° .

Figura 23

Grafica que muestra la inclinación durante el año 2017



Nota. La variación es bastante regular, con pequeñas oscilaciones.

La longitud del nodo ascendente tampoco varía mucho, como se puede ver en la Figura 24, aunque el cambio es más notable que en la inclinación. Se mueve entre los 135.1352° y los 154.3165° .

Figura 24

Grafica que muestra la longitud del nodo ascendente durante el año 2017

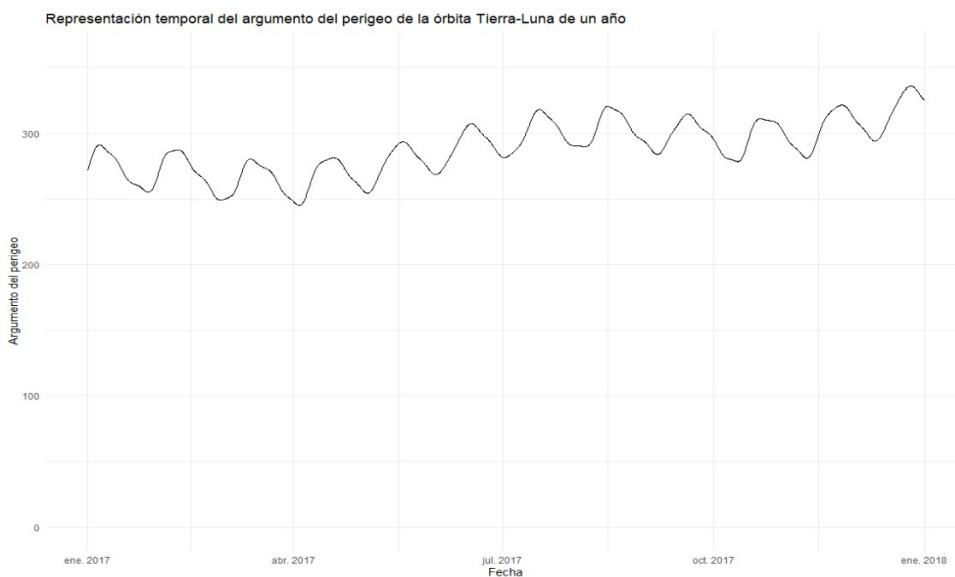


Nota. No se ven muchas oscilaciones y la variación es pequeña.

Por otra parte, el argumento del perigeo tiene bastantes oscilaciones a lo largo del año, lo que puede significar una variación del punto de perigeo o del nodo ascendente. Esto se puede observar en la Figura 25.

Figura 25

Grafica que muestra el argumento del perigeo durante el año 2017

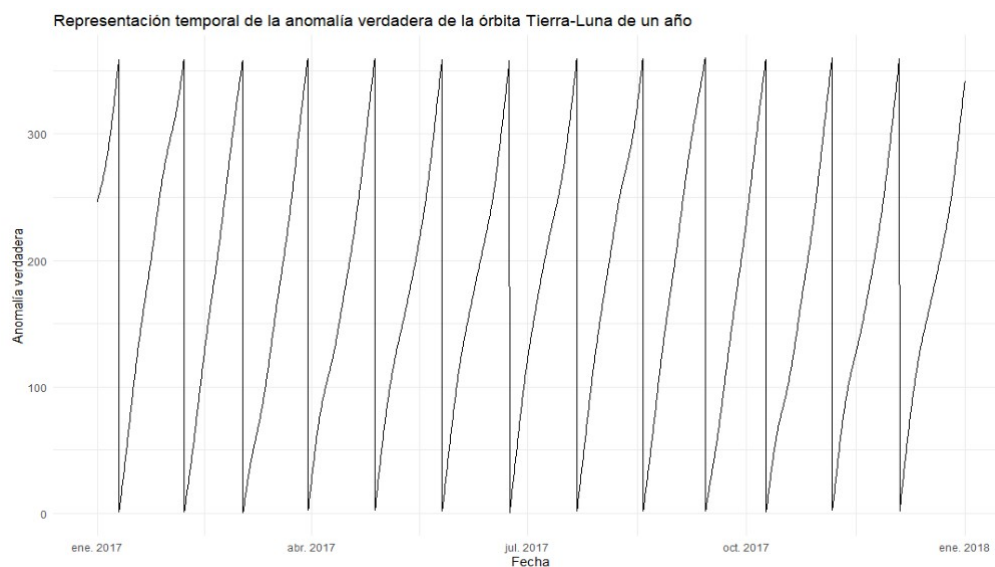


Nota. Presenta numerosas oscilaciones.

Por último, la anomalía verdadera es el parámetro que posiciona al cuerpo en la órbita. Esta mide el ángulo desde el perigeo. Como sabemos que la Luna se mueve de forma progresiva, por el comportamiento del vector posición visible en las gráficas en la Figura 14, pero no de manera constante, porque la velocidad no es constante en ninguno de los ejes como se ve en la Figura 15 y también explicado por la *Segunda Ley de Kepler*, se espera que la gráfica refleje dicho comportamiento. La Figura 26 muestra que es así, ya que no hay pequeñas oscilaciones, lo que indica que la Luna se mueve de manera progresiva, pero la razón de cambio del ángulo no es constante, por lo que lo esperado concuerda con lo medido.

Figura 26

Gráfica que muestra la anomalía verdadera durante el año 2017



Nota. El ángulo cambia progresivamente entre 0° y 360° de manera cíclica, pero no constante.

5. IMPLEMENTACIÓN DE CONCEPTOS CON LOS DATOS

Una vez se conocen los datos y cómo se comporta cada parámetro, voy a realizar las transformaciones entre el vector estado y los elementos orbitales. Además, como dispongo de ambos conjuntos de datos, podré hacer comparaciones con lo que yo obtenga y calcular el error cometido en el cálculo.

A la hora de estudiar el error del cálculo, es importante saber la precisión de los valores en coma flotante con la que trabaja RStudio, ya que es el programa que utilizo para realizar todos los cálculos especificados. Para simplificar y no sobrecargar la memoria del ordenador para representar un número de coma flotante utiliza una cantidad finita de dígitos. Es fácil deducir que, si los números están representados de manera incompleta, las operaciones aritméticas darán resultados incompletos también, por lo que la precisión en el cálculo no sería óptima. Si es solamente una operación este error puede no ser muy grande, pero, como es este caso, si se acumulan varias operaciones aritméticas el error escala y la precisión resultante es entonces mucho menor.

La manera en la que se representan los valores de los números en lenguaje binario, que es como opera el ordenador, determina que los valores de punto flotante se almacenen como una aproximación según la precisión especificada. Esto es porque algunos números no tienen representación con un número finito de dígitos en binario. Este es el principal origen del problema planteado.

Hay algunos programas para los que tanto desarrolladores como otros usuarios han creado librerías que solucionan este problema en concreto. En concreto, RStudio usa el estándar de precisión en coma flotante definido por el IEEE 754 que según si son números de simple o doble precisión tienen características diferentes. Si es un número de doble precisión, tiene una precisión de 64 bits en total (53 para la mantisa) y proporciona aproximadamente entre 15 y 17 dígitos decimales de precisión. Por otra parte, si se trabaja con números de precisión simple, tienen una precisión de 32 bits en total (23 para la mantisa), lo que proporciona entre 6 y 9 dígitos decimales de precisión.

Haciendo una comprobación sencilla, se puede saber que la precisión que utiliza RStudio es doble. Sin embargo, esta se puede ampliar gracias a una librería en R: *Rmpfr* (Cook, 2020). Viene de la librería *MPFR* desarrollada para C que significa “*Multiple Precision Floating-point Reliable*”. La función que voy a utilizar de esta librería es *mpfr()*, que toma como primer valor el número a almacenar y como segundo el número de bits. Es decir, esta función permite especificar el número de bits utilizados para la precisión de dicho número.

Una vez se sabe la precisión con la que se trabaja, voy a continuar con la relación entre la posición y la velocidad y los parámetros de la órbita lunar. En primer lugar, partiendo del vector estado voy a hacer los cálculos especificados en el apartado 2.3.1. En el ANEXO se muestra el error cometido en los primeros 10 valores para cada variable de posición y velocidad con la precisión por defecto de RStudio.

Para hacer una comparación propia, en la Tabla 1 que se muestra a continuación se incluye el error cometido con una precisión en los números de coma flotante de 100 bits. Además, se ha reducido el error final a 6 decimales.

Tabla 1

Tabla de error cometido al calcular las efemérides en cada eje con 100 bits de precisión en los 10 primeros valores del dataset

e	a	i	Ω	f	w	p
-1.165816e-15	3.47352e-16	-2.072069e-16	2.644908e-17	1.594037e-15	-3.086767e-15	3.535425e-16
2.804963e-15	5.927625e-17	-3.167451e-17	-2.635196e-16	2.101328e-16	-3.994657e-16	4.475221e-17
3.262582e-16	-2.845715e-17	-2.412286e-17	-1.545067e-16	1.812892e-16	-3.810718e-16	-3.010456e-17
-5.690143e-15	-4.055971e-16	1.532345e-16	-1.72033e-17	2.653742e-16	4.438915e-16	-3.775742e-16
1.853038e-16	9.605375e-17	-8.985301e-17	-3.117374e-16	8.690241e-17	-4.041891e-16	9.5163491e-17
-4.232452e-15	3.654329e-16	-8.117771e-17	2.088882e-16	6.740301e-16	-1.132811e-15	3.852745e-16
2.32413e-15	-1.083239e-16	-1.278380e-16	-1.13532e-17	6.738767e-17	2.720748e-16	-1.189586e-16
-1.20323e-15	2.5498322e-16	-1.703871e-16	1.044469e-16	1.135651e-15	-1.601813e-15	2.60359e-16
-6.125448e-16	5.368437e-16	8.866884e-17	-2.515033e-16	1.397194e-15	-3.40259e-15	5.341708e-16
-2.150897e-15	-2.513677e-16	-1.452702e-16	2.32391e-16	-4.775e-16	7.360227e-16	-2.421968e-16

El error cometido en el cálculo se obtenido restando el valor calculado al valor obtenido de la interfaz de la NASA y se ha dividido entre este mismo valor, para obtener todos los errores relativos y poder comparar todos en el mismo rango. El cálculo se especifica en la Ecuación 8.

$$error_{relativo} = \frac{valor\ calculado - valor\ interfaz}{valor\ interfaz} \quad (8)$$

Por otro lado, utilizando los valores de los elementos orbitales, voy a calcular el vector estado utilizando los cálculos especificados en el apartado 2.3.2 y voy a calcular el error relativo cometido según la Ecuación 8, como en el caso anterior. En la Tabla 2 que se presenta a continuación se muestran los valores obtenidos del error cometido con una precisión en los

números de coma flotante de 100 bits. El error en la velocidad tiene los mismos primeros 10 decimales en notación científica, por lo que al reducirlos a 6 se queda en el mismo error en las muestras.

Tabla 2

Tabla de error cometido al calcular posición y velocidad en cada eje con 100 bits de precisión en los 10 primeros valores del dataset

x	y	z	v _x	v _y	v _z
1.358318e-16	1.313248e-15	7.128427e-16	-1.39739e-15	4.489171e-17	-2.50128e-16
9.808611e-17	1.030626e-14	-8.115990e-17	1.427056e-13	-1.38702e-16	-8.62783e-17
-3.667931e-17	1.150543e-14	-9.634644e-17	1.96088e-13	1.099099e-17	-1.0941e-17
-5.315442e-16	3.169060e-14	-4.277706e-16	-3.29466e-15	3.382581e-16	4.014057e-16
5.154640e-17	-8.757929e-15	1.214980e-18	-4.465036e-14	3.394437e-17	-1.96121e-16
1.051386e-18	1.748478e-14	-1.564040e-18	1.142992e-14	-4.03383e-17	7.458061e-17
-1.624740e-16	9.516651e-15	-4.334707e-17	7.972386e-15	-1.78952e-16	4.456197e-17
-1.995431e-16	1.053026e-14	-7.282674e-17	9.059409e-14	1.938556e-16	1.409357e-16
6.713373e-16	-1.047426e-14	8.647815e-17	-8.16154e-16	3.662654e-16	-8.86144e-17
-3.661114e-16	2.669606e-15	2.401851e-18	2.033442e-15	-3.19799e-16	-9.98307e-16

Realmente la diferencia entre una precisión y otra no es muy grande, se ven cómo cambia el valor de algunos decimales, pero no cambia la magnitud. Sin embargo, se puede ver como el error relativo cometido es de un orden muy similar en todos los parámetros.

Por otro lado, también se quiso comprobar el error que se cometía partiendo de los parámetros del vector estado, calculando las efemérides y calculando de nuevo el vector estado, para calcular el error relativo entre los parámetros obtenidos y los calculados. También se comprobó partiendo de las efemérides. Teóricamente, este error debería ser prácticamente nulo. Sin embargo, sí se comete cierto error procedente de lo comentado en este capítulo. Los resultados que se comentan a continuación han sido obtenidos con una precisión de 100 decimales: al calcular la posición se tiene un error relativo del orden de $1e-17$, el obtenido con la velocidad es algo mayor: $1e-15$. Por otra parte, las efemérides presentan valores más dispersos. Por ejemplo, la excentricidad tiene un error relativo mucho menor, del orden de $1e-28$, el semieje mayor tiene una magnitud de error aún menor, alrededor de $1e-30$ y, por último, la inclinación, la longitud del nodo ascendente, la anomalía verdadera y el argumento del perigeo presentan un error relativo del orden de $1e-17$.

6. WOLFRAM MATHEMATICA

Para finalizar con el trabajo, hemos considerado hacer una comparación con la base de datos de Wolfram Mathematica. Este es un programa de matemáticas de carácter muy general que ha implementado librerías muy completas de astronomía y en su base de datos se encuentra información y mediciones sobre las efemérides de objetos del Sistema Solar, entre ellos la Luna. El objetivo principal es estudiar la diferencia en las mediciones y, una vez obtenidas, realizar un estudio para determinar la fuente de cada base de datos.

En primer lugar, se ha realizado un estudio con la versión web y gratuita de este programa: Wolfram Alpha (Wolfram Alpha, s.f.), que ofrece la posibilidad de acceder a cada valor especificando día y hora de la medición. Lamentablemente, solo proporciona información actualizada de la distancia, del resto de parámetros ofrece valores medios o más genéricos por lo que una comparación con la base de datos obtenida de JPL no tendría sentido. Como el objetivo realmente es comparar ambas bases de datos, esto podría ser suficiente, aunque poder comparar todos los valores habría sido lo ideal. Es por ello que, finalmente, se ha realizado esta comparación para la distancia entre la Tierra y la Luna en 10 fechas diferentes aleatorias y repartidas entre 2014 y 2024, para evitar errores o algún tipo de fallo temporal en la medición. Los resultados de la diferencia y la diferencia relativa, respecto al valor de la NASA, en kilómetros se muestran en la Tabla 3 a continuación.

Tabla 3

Tabla de error cometido al restar la distancia ofrecida por la base de datos en la página de la NASA y la ofrecida por WolframAlpha.

	Distancia JPL_NASA	Distancia Mathematica	Diferencia	Diferencia Relativa
<i>2014-10-21 00:00:00</i>	400971.1	400521	450.071	1.122452e-03
<i>2014-10-25 00:00:00</i>	387720.3	387157	563.2927	1.452833e-03
<i>2018-08-13 00:00:00</i>	362707	363376	-669.0482	-1.844597e-03
<i>2018-08-19 00:00:00</i>	395862.9	396607	-744.0749	-1.879628e-03
<i>2018-08-25 00:00:00</i>	404828.7	404625	203.6628	5.030839e-04
<i>2021-02-07 00:00:00</i>	372477.8	372801	-323.2199	-8.677561e-04
<i>2021-02-24 00:00:00</i>	386649.7	385544	1105.684	2.859653e-03
<i>2024-08-13 00:00:00</i>	396430.2	395646	784.2369	1.978247e-03
<i>2024-09-13 00:00:00</i>	380704	379652	1052.045	2.76342e-03
<i>2024-10-13 00:00:00</i>	370677.4	369734	943.3552	2.544949e-03

A pesar de que como error relativo puede parecer que no es demasiado, una diferencia de hasta más de mil kilómetros es bastante significativa.

Si comprobamos las fuentes de los datos de la interfaz web Wolfram Alpha, vemos que obtiene sus valores de su propia base de datos *Wolfram|Alpha Knowledgebase, 2020* y *Wolfram Language PlanetaryMoonData*. Además, cita las fuentes externas a ella, entre las que se encuentra la propia base de datos utilizada a lo largo de este trabajo: *California Institute of Technology Jet Propulsion Laboratory. JPL Solar System Dynamics*. Sin embargo, se especifica que la lista incluida “intenta ser una guía de las fuentes para mayor información” (Wolfram Alpha, s.f.). Esto quiere decir que no se ha utilizado necesariamente datos de esta base de datos para proporcionar los valores solicitados.

Por otra parte, también hemos querido realizar una comparación con la versión más actualizada del programa Mathematica. Afortunadamente, en este programa se puede especificar el repositorio de datos del cual se quieren utilizar los valores, por lo que decidimos utilizar los mismos que obtuvimos, para comprobar su parecido. Para su uso se debe especificar su nombre: *HorizonsEphemerisData*. Lo esperado es que sean idénticos, pues se le ha especificado al programa que obtenga los datos de la misma base de datos. Se han realizado los mismos cálculos y procedimientos explicados a lo largo del trabajo. Al hacer la comparación, se puede observar que los valores no son exactamente idénticos, pero el error es pequeño. Esta diferencia es mucho menor a la obtenida al comparar con Wolfram Alpha, pero no es nula como se podía esperar. No obstante, esto puede estar relacionado con el error en coma flotante que se comete al realizar los cálculos en determinados programas. Sería muy interesante saber la procedencia de esta diferencia, pero se tiene muy poca información a cerca de cómo trabaja este programa con los datos. Además, en esta aplicación tampoco se pudieron obtener valores para las efemérides en cada momento, aunque se pudo realizar la comparación siguiendo el procedimiento explicado en el libro de Abad (2012), también explicadas y comentadas en este trabajo.

7. CONCLUSIONES

Tratar de definir, explicar e interpretar la órbita de la Luna es una tarea mucho más difícil de lo que puede parecer en un primer momento. Se puede ver con la breve historia comentada en la introducción y con todo el fundamento teórico explicado. Que se involucren tantos cuerpos en un único movimiento hace que sea mucho más difícil, pero a la vez más emocionante de estudiar. Con este trabajo he tratado de hacer ver la complejidad que esto supone y además mostrar de manera teórica los conceptos, acompañados de mediciones reales.

- i. La base de datos utilizada (Park, Solar System Dynamics NASA, s.f.) es muy completa, el uso que se le ha dado a lo largo de este trabajo ha sido pequeño en comparación con todas las posibilidades que ofrece. Considero que es muy bueno que un repositorio de datos tan completo sea accesible para cualquiera que necesite su uso. No obstante, es importante saber cómo tratarlos y leerlos para poder utilizarlos correctamente en otros estudios. Esta parte es la que más relacionada está con el grado en Ciencia de Datos, además de la parte posterior de visualización de datos y otros procesos que no han podido ser incluidos en la memoria. Se han utilizado los programas *Python* y *RStudio*, estudiados a lo largo de los años de grado.
- ii. Como se explica en el capítulo 3, en el que se habla acerca de los datos, en un primer momento se utiliza otra base de datos también perteneciente a la NASA. Esta era también muy completa en cuanto a diversidad de contenido y el tratado de los datos era de diferente manera, puesto que medía la posición de la Luna con mediciones de rango láser. Desafortunadamente, los momentos medidos de la Luna que ofrecía la interfaz no eran suficientes para poder hacer correctamente este estudio, por lo que se tuvo que empezar de nuevo y encontrar otro repositorio de datos.
- iii. Por otro lado, el trabajo no solo se ha limitado a presentar conocimientos y resumir la evolución del movimiento de la Luna en el Sistema Solar, sino que se han relacionado los conceptos teóricos con los valores medidos, reales. Se han plasmado de forma gráfica y se han interpretado. Es importante saber el significado de cada concepto, pero también ser capaz de verlo en la práctica, analizarlo y comentarlo correctamente.
- iv. Finalmente, hay algunas cuestiones que por diferentes motivos no se han podido incluir, por lo que son cuestiones en las que se puede trabajar para ampliar este trabajo. Por una parte, nos hubiera gustado haber podido realizar una comparación mucho más específica entre la base de datos JPL de NASA y Mathematica. Es cierto que proporcionan un contacto para poder presentar dudas, pero por cuestiones de tiempo no se ha podido incluir la respuesta a la diferencia de kilómetros que existe entre ambas. Por otra parte, al hacer el cálculo de la distancia entre la Tierra y la Luna, se quiso estudiar la razón de alejamiento de la Luna de la Tierra mediante un estudio estadístico. En él, se esperaba ver una relación entre la distancia y los años, y que el coeficiente existente entre ambos fuera de aproximadamente 3,78 centímetros por año. Para ello, en primer lugar, se estudió un modelo lineal: la hipótesis confirmaba que la distancia tenía una relación directa con el año, pero no se pudo aceptar el modelo debido a su alto p-valor y al valor de R^2 . Este valor representa la proporción de la variabilidad en la variable dependiente (distancia) que es explicada por el modelo, ajustado

por el número de predictores en el modelo. En el modelo definido este valor era muy bajo, lo que indica que el modelo no está explicando bien la variabilidad de los datos, y por ello, entre otras razones, el modelo se rechazó. Se realizaron más estudios con otras variables; como el semieje mayor, la amplitud en cada órbita, el máximo de la distancia en cada órbita, en cada año y el mínimo y la media en estos mismos casos. Además, se utilizaron otras herramientas estadísticas, como la estrategia del paso adelante “*forward step*”, estudios ANOVA y se planteó el modelo como una serie temporal. Al hacer un estudio con un modelo ARIMA, ajustaba una serie temporal de ruido blanco, lo que no es adecuado para el objetivo de modelar la distancia entre la Tierra y la Luna. Finalmente, aunque se probaron otros modelos con ajustes polinómicos, transformaciones logarítmicas y splines para suavizar, no se pudo aceptar ninguno de los modelos planteados al analizar los gráficos de diagnóstico del modelo, los residuos y las métricas de comparación de modelos.

Por mi parte, considero tan importante saber tratar los datos como entenderlos, es decir, es fundamental saber utilizar los conocimientos obtenidos a lo largo de los años en este grado, pero es primordial aplicarlos adecuadamente a lo que requiere el problema en concreto. El funcionamiento del universo es algo que siempre me ha maravillado y estudiarlo es algo que definitivamente quería hacer, por lo que haber podido realizar un trabajo en este ámbito ha sido todo un reto para mí. Considero que el hecho de que el tema sea de interés me proporcionó una motivación extra frente a los momentos difíciles que fueron surgiendo durante la realización del trabajo. He podido aprender muchas cosas durante este tiempo, no solo lo incluído en la memoria, sino mucho más allá; infinidad de conceptos nuevos. Podemos estudiar y creer saber mucho sobre algo, pero nunca se deja de aprender cosas nuevas.

8. ANEXO

En el capítulo 3.1 se hablaba sobre cómo obtener los ficheros de datos que se necesitan para este trabajo. En esta primera parte del anexo se presenta la estructura de dichos ficheros y la explicación de cada parte.

La Figura 27 muestra la primera parte, donde se encuentran las especificaciones generales de interés se divide a su vez en dos. La parte del encabezado contiene la información más general como el nombre del objeto a observar y datos geofísicos de este. La segunda parte contiene la información sobre lo seleccionado en la propia interfaz web, donde se encuentra también algunos datos sobre las medidas en la que se encuentran y por último las variables o medidas que se recogen en el documento en cada fecha.

A esto lo sigue inmediatamente la segunda parte, que es la del contenido principal de los datos. En general esta sección contiene medidas de cada una de las variables para cada una de las fechas (entendiendo por fecha día, y hora). Las variables son las que aparecen al inicio del documento en las medidas que se especifican en el mismo lugar.

La Figura 28 presenta un fragmento como pequeño ejemplo del formato de los datos. Se puede observar que antes de comenzar con el registro de datos, estos están precedidos por “\$\$SOE”, lo que ayuda a diferenciar cada una de las partes del documento con facilidad, ya que, al finalizar con esta parte, estará escrito “\$\$EOE”.

Lo primero que se puede observar es que en la primera línea de cada registro (entendiendo por cada registro lo conformado por la fecha y las respectivas medidas relacionadas con ella) se encuentra la fecha, la cual está dada en dos calendarios diferentes, siendo primero el juliano, seguido del gregoriano. Yo utilizaré el segundo formato en el resto del tratamiento de datos. Además, se puede observar que el primer grupo de variables, que se identifican con “XYZ”, son las coordenadas y velocidades de la Luna respecto a la Tierra. Los tres primeros valores corresponden a las coordenadas cartesianas, respectivamente X, Y y Z. Los tres siguientes son la velocidad, dada de la misma manera, respectivamente velocidad en el eje X, velocidad en el eje Y y velocidad en el eje Z. La siguiente parte que es la que está identificada como “sigmas” contiene medidas de incertidumbre de las posiciones y velocidades de 1-sigma en dirección X, también en dirección Y e igualmente en dirección Z, lo cual hubiese sido interesante haber podido trabajar con ello. Sin embargo, no se tienen registros de estas medidas para el cuerpo seleccionado. Así, todos los registros presentan la misma estructura, con las variables siguiendo un orden previamente establecido y las fechas ordenadas cronológicamente.

Por último, la información acerca de cada variable viene precedido, como ya he explicado, por “\$\$EOE”, de manera que se ve claro el final de una parte y el comienzo de la siguiente. En la Figura 29 se muestra un ejemplo de cómo se presenta la información tanto del significado como de las medidas de cada variable, para una buena comprensión y tratamiento óptimo de cada medida recogida.

Figura 27

Imagen de la parte inicial del documento generado con Vector Table

```
*****
Ephemeris / WWW_USER Fri Oct 25 00:45:46 2024 Pasadena, USA / Horizons
*****
Target body name: Moon (301) {source: DE441}
Center body name: Earth (399) {source: DE441}
Center-site name: Heaven on Earth Observatory, Mayhill
*****
Start time : A.D. 2014-Oct-21 00:00:00.0000 TDB
Stop time : A.D. 2024-Oct-21 00:00:00.0000 TDB
Step-size : 720 minutes
*****
Center geodetic : 254.471, 32.9035384, 2.23607 {E-lon(deg),Lat(deg),Alt(km)}
Center cylindrical: 254.471, 5362.17112, 3446.19639 {E-lon(deg),Dxy(km),Dz(km)}
Center pole/equ : ITRF93 {East-longitude positive}
Center radii : 6378.137, 6378.137, 6356.752 km {Equator_e, b, pole_e}
Output units : KM-S
Calendar mode : Mixed Julian/Gregorian
Output type : GEOMETRIC cartesian states
Output format : 2xarp (pos. & vel. w/uncertainties: XYZ, ACN, RTN, POS)
EOP file : eop.241024.p250120
EOP coverage : DATA-BASED 1962-JAN-20 TO 2024-OCT-24. PREDICTS-> 2025-JAN-19
Reference frame : Ecliptic of J2000.0
*****
JDTDB
State : X Y Z VX VY VZ
1-sigma : X_s Y_s Z_s VX_s VY_s VZ_s
ACN : A_s C_s N_s VA_s VC_s VN_s
RTN : R_s I_s N_s VR_s VT_s VN_s
POS : A_RA_s Q_DEC_s R_s VA_RA_s VD_DEC_s VR_s
*****

Revised: July 31, 2013 Moon / (Earth) 301

GEOPHYSICAL DATA (updated 2018-Aug-15):
Vol. mean radius, km = 1737.53+-0.03 Mass, x10^22 kg = 7.349
Radius (gravity), km = 1738.0 Surface emissivity = 0.92
Radius (IAU), km = 1737.4 GM, km^3/s^2 = 4902.800066
Density, g/cm^3 = 3.3437 GM 1-sigma, km^3/s^2 = +-0.0001
V(1,0) = +0.21 Surface accel., m/s^2 = 1.62
Earth/Moon mass ratio = 81.3005690769 Farside crust. thick. = ~80 - 90 km
Mean crustal density = 2.97+-0.07 g/cm^3 Nearside crust. thick. = 58+-8 km
Heat flow, Apollo 15 = 3.1+-0.6 mW/m^2 Mean angular diameter = 31'05.2"
Heat flow, Apollo 17 = 2.2+-0.5 mW/m^2 Sid. rot. rate, rad/s = 0.000026617
Geometric Albedo = 0.12 Mean solar day = 29.5306 d
Obliquity to orbit = 6.67 deg Orbit period = 27.321582 d
Semi-major axis, a = 384400 km Eccentricity = 0.05490
Mean motion, rad/s = 2.6616995x10^-6 Inclination = 5.145 deg
Apsidal period = 3231.50 d Nodal period = 6798.38 d

Perihelion Aphelion Mean
Solar Constant (W/m^2) 1414+-7 1323+-7 1368+-7
Maximum Planetary IR (W/m^2) 1314 1226 1268
Minimum Planetary IR (W/m^2) 5.2 5.2 5.2
*****
```

Nota. Parte inicial del documento generado que se ha dividido en dos partes. Utilizado en apartado 3.1.1.

Figura 28

Imagen de la parte central del documento generado con Vector Table

```
*****
$$$$$
2456951.500000000 = A.D. 2014-Oct-21 00:00:00.0000 TDB
XYZ : -3.998062391984799E+05 4.442140150517243E+04 -2.087866003790129E+04 -4.536748932615691E-01 -1.058663565959926E+00 1.196239046163804E-01
sigmas: . . . . .
ACN(1-sigma): . . . . .
RTN(1-sigma): . . . . .
POS(1-sigma): . . . . .
2456952.000000000 = A.D. 2014-Oct-21 12:00:00.0000 TDB
XYZ : -3.981267852598670E+05 -7.481693210370271E+03 -1.305797194741565E+04 4.140307250922108E-01 -8.96536764763280E-01 4.920995678075341E-02
sigmas: . . . . .
ACN(1-sigma): . . . . .
RTN(1-sigma): . . . . .
POS(1-sigma): . . . . .
2456952.500000000 = A.D. 2014-Oct-22 00:00:00.0000 TDB
XYZ : -3.969140868076142E+05 -4.029611466251073E+04 -1.337113194651011E+04 -2.360823159290880E-01 -1.065561106725073E+00 1.287798259187623E-01
sigmas: . . . . .
ACN(1-sigma): . . . . .
RTN(1-sigma): . . . . .
POS(1-sigma): . . . . .
2456953.000000000 = A.D. 2014-Oct-22 12:00:00.0000 TDB
XYZ : -3.857118004259457E+05 -9.169264842865823E+04 -5.328972218508927E+03 6.285762410113613E-01 -8.680334937881546E-01 5.113371185011811E-02
sigmas: . . . . .
ACN(1-sigma): . . . . .
RTN(1-sigma): . . . . .
POS(1-sigma): . . . . .
2456953.500000000 = A.D. 2014-Oct-23 00:00:00.0000 TDB
XYZ : -3.753758182680245E+05 -1.230644602291309E+05 -5.474480227902903E+03 -2.034825091065395E-02 -1.025260881687190E+00 1.337296288478399E-01
sigmas: . . . . .
ACN(1-sigma): . . . . .
RTN(1-sigma): . . . . .
POS(1-sigma): . . . . .
2456954.000000000 = A.D. 2014-Oct-23 12:00:00.0000 TDB
*****
```

Nota. Parte que contiene los datos del documento generado. Utilizado en el apartado 3.1.1.

Figura 29

Imagen de la parte final del documento generado con Vector Table

```
Coordinate system description:
ACN: The axes of the ACN coordinate system are the orthonormal basis
vectors A, C, and N. N and A are defined by physical parameters,
while C completes the right-handed system.

A is the along-track direction in the plane of the orbit and
parallel to the relative velocity vector. It is positive in
the same directional sense as relative velocity.
C is the cross-track direction in the plane of the orbit and
positive in the general direction of the coordinate origin
(but not necessarily directed to it), C = N x A.
N is the normal direction perpendicular to the instantaneous
plane defined by N = P x V, where P and V are position and
velocity vectors with respect to the coordinate origin.

Symbol meaning:|
A_s   Along-track direction 1-sigma position uncertainty (km)
C_s   Cross-track direction 1-sigma position uncertainty (km)
N_s   Normal direction 1-sigma position uncertainty (km)
VA_s  Along-track direction 1-sigma velocity uncertainty (km/sec)
VC_s  Cross-track direction 1-sigma velocity uncertainty (km/sec)
VN_s  Normal direction 1-sigma velocity uncertainty (km/sec)

Coordinate system description:
RTN: The axes of the RTN coordinate system are the orthonormal basis
vectors R, T, and N. R and N are defined by physical parameters
```

Nota. Parte final del documento generado. Utilizado en el apartado 3.1.1.

En este mismo apartado, se presenta el otro tipo de fichero que se necesita. A continuación, se explican las partes de este de la misma manera que el otro fichero.

La parte inicial en la Figura 30, la parte de los datos en la Figura 31 y la parte final en la Figura 32. En la Figura 30 se ve como la primera parte del documento tiene la misma estructura que el documento generado anteriormente.

Figura 30

Imagen de la parte inicial del documento generado con Osculating Orbital Elements

```
*****
Ephemeris / WWW_USER Thu Nov 28 03:34:54 2024 Pasadena, USA / Horizons
*****
Target body name: Moon (301) {source: DE441}
Center body name: Earth (399) {source: DE441}
Center-site name: BODY CENTER
*****
Revised: July 31, 2013 Moon / (Earth) 301
*****
GEOPHYSICAL DATA (updated 2018-Aug-15):
Vol. mean radius, km = 1737.53+-0.03 Mass, x10^22 kg = 7.349
Radius (gravity), km = 1738.0 Surface emissivity = 0.92
Radius (IAU), km = 1737.4 GM, km^3/s^2 = 4902.800066
Density, g/cm^3 = 3.3437 GM 1-sigma, km^3/s^2 = +-0.0001
V(1,0) = +0.21 Surface accel., m/s^2 = 1.62
Earth/Moon mass ratio = 81.3005690769 Farside crust. thick. = ~80 - 90 km
Mean crustal density = 2.97+- .07 g/cm^3 Nearside crust. thick. = 58+-8 km
Heat flow, Apollo 15 = 3.1+- .6 mW/m^2 Mean angular diameter = 31'05.2"
Heat flow, Apollo 17 = 2.2+- .5 mW/m^2 Sid. rot. rate, rad/s = 0.000026617
Geometric Albedo = 0.12 Mean solar day = 29.5306 d
Obliquity to orbit = 6.67 deg Orbit period = 27.321582 d
Semi-major axis, a = 384400 km Eccentricity = 0.05490
Mean motion, rad/s = 2.6616995x10^-6 Inclination = 5.145 deg
Ansidal period = 3231.50 d Nodal period = 6798.38 d
*****
Solar Constant (W/m^2) Perihelion Aphelion Mean
1414+-7 1323+-7 1368+-7
Maximum Planetary IR (W/m^2) 1314 1226 1268
Minimum Planetary IR (W/m^2) 5.2 5.2 5.2
*****
Start time : A.D. 2014-Oct-21 00:00:00.0000 TDB
Stop time : A.D. 2024-Oct-21 00:00:00.0000 TDB
Step-size : 240 minutes
*****
Center geodetic : 0.0, 0.0, 0.0 {E-lon(deg),Lat(deg),Alt(km)}
Center cylindric: 0.0, 0.0, 0.0 {E-lon(deg),Dxy(km),Dz(km)}
Center radii : 6378.137, 6378.137, 6356.752 km {Equator_a, b, pole_c}
Keplerian GM : 4.0350323562548013E+05 km^3/s^2
Output units : KM-5, deg, Julian Day Number (JD)
Calendar mode : Mixed Julian/Gregorian
Output type : GEOMETRIC osculating elements
Output format : 10
EOP file : eop.241127.p250223
EOP coverage : DATA-BASED 1962-JAN-20 TO 2024-NOV-27. PREDICTS-> 2025-FEB-22
Reference frame : Ecliptic of J2000.0
*****
JDTDB
EC QR IN
OM W Ip
N MA TA
A AD PR
*****
```

Nota. Parte inicial del documento generado que se ha dividido en dos partes. Utilizado en el apartado 3.1.2.

La parte de los datos en la Figura 31, aunque tenga la misma estructura respecto a diferenciar cada registro, es lo más diferente a lo visto en el anterior, ya que recoge variables distintas. Hay 4 filas de valores por registro, habiendo 3 entradas en cada una. De estas 12 variables, se seleccionarán las relevantes en el estudio, las cuales se especifican a continuación, junto con la última parte del documento en la Figura 32 que contiene la explicación de lo que es cada una. De todas las variables medidas, voy a registrar la excentricidad, la distancia de perigeo, la inclinación, la longitud del nodo ascendente, el argumento del perigeo, el tiempo de perigeo, anomalía verdadera, semieje mayor, distancia de apoapsis y el periodo de órbita sidereal.

Figura 31

Imagen de la parte central del documento generado con Osculating Orbital Elements

```
*****
$$$$$
2456951.500000000 = A.D. 2014-Oct-21 00:00:00.0000 TDB
EC= 5.146040401470859E-02 QR= 3.652695534117983E+05 IN= 5.289139059681499E+00
OM= 1.990708453551988E+02 W = 1.199717110567082E+02 Tp= 2456962.25455734806
N = 1.523032356872092E-04 MA= 2.184808057832779E+02 TA= 2.149898018444954E+02
A = 3.850862472771905E+05 AD= 4.049029411425827E+05 PR= 2.363705527171762E+06
2456951.666666667 = A.D. 2014-Oct-21 04:00:00.0000 TDB
EC= 5.081636652553125E-02 QR= 3.657281068891690E+05 IN= 5.288720322316722E+00
OM= 1.990728700038318E+02 W = 1.197890891068555E+02 Tp= 2456962.252408117522
N = 1.521717370143369E-04 MA= 2.208225026122908E+02 TA= 2.171931212133084E+02
A = 3.853080626247507E+05 AD= 4.048880183603323E+05 PR= 2.365748115013515E+06
2456951.833333333 = A.D. 2014-Oct-21 08:00:00.0000 TDB
EC= 5.018306197831332E-02 QR= 3.661753801645068E+05 IN= 5.288279348456627E+00
OM= 1.990748029123959E+02 W = 1.196081014458560E+02 Tp= 2456962.250069885049
N = 1.520450538046088E-04 MA= 2.231585335188376E+02 TA= 2.194001195551387E+02
A = 3.855220574684531E+05 AD= 4.048687347723993E+05 PR= 2.367719244998470E+06
2456952.000000000 = A.D. 2014-Oct-21 12:00:00.0000 TDB
EC= 4.956163173092956E-02 QR= 3.666099631900892E+05 IN= 5.287816455744017E+00
OM= 1.990766280646228E+02 W = 1.194308493816000E+02 Tp= 2456962.247664433904
N = 1.519237557417071E-04 MA= 2.254869790548467E+02 TA= 2.216088746628428E+02
A = 3.857272343263623E+05 AD= 4.048445054626354E+05 PR= 2.369609665338009E+06
2456952.166666667 = A.D. 2014-Oct-21 16:00:00.0000 TDB
EC= 4.895303751664511E-02 QR= 3.670305411720479E+05 IN= 5.287332078389546E+00
OM= 1.990783294661386E+02 W = 1.192596109583181E+02 Tp= 2456962.245331557933
N = 1.518083924367333E-04 MA= 2.278057609349106E+02 TA= 2.238172753117883E+02
A = 3.859226259591483E+05 AD= 4.048147107462488E+05 PR= 2.371410395838499E+06
2456952.333333333 = A.D. 2014-Oct-21 20:00:00.0000 TDB
EC= 4.835805557434028E-02 QR= 3.674359021017466E+05 IN= 5.286826768156822E+00
OM= 1.990798912442965E+02 W = 1.190968216103099E+02 Tp= 2456962.243226099759
N = 1.516994909364758E-04 MA= 2.301126605698477E+02 TA= 2.260230404790701E+02
A = 3.861073003917492E+05 AD= 4.047786986817519E+05 PR= 2.373112775643723E+06
2456952.500000000 = A.D. 2014-Oct-22 00:00:00.0000 TDB
EC= 4.77777368041582E-02 QR= 3.678240421541174E+05 IN= 5.286301104664474E+00
```

Nota. Parte que contiene los datos del documento generado. Utilizado en el apartado 3.1.2.

Figura 32

Imagen de la parte final del documento generado con *Osculating Orbital Elements*

```
AVAILABLE AT SUCH PHYSICAL EVENTS ARE THE PRIMARY INTEREST.

REFERENCE FRAME AND COORDINATES

Ecliptic at the standard reference epoch

Reference epoch: J2000.0
X-Y plane: adopted Earth orbital plane at the reference epoch
           Note: IAU76 obliquity of 84381.448 arcseconds wrt ICRF X-Y plane
X-axis   : ICRF
Z-axis   : perpendicular to the X-Y plane in the directional (+ or -) sense
           of Earth's north pole at the reference epoch.

Symbol meaning:

JD TDB   Julian Day Number, Barycentric Dynamical Time
EC       Eccentricity, e
QR       Periapsis distance, q (km)
IN       Inclination w.r.t X-Y plane, i (degrees)
OM       Longitude of Ascending Node, OMEGA, (degrees)
W        Argument of Perifocus, w (degrees)
Tp       Time of periapsis (Julian Day Number)
N        Mean motion, n (degrees/sec)
MA       Mean anomaly, M (degrees)
TA       True anomaly, nu (degrees)
A        Semi-major axis, a (km)
AD       Apoapsis distance (km)
PR       Sidereal orbit period (sec)

ABBREVIATIONS AND CORRECTIONS
```

Nota. Parte final del documento generado. Utilizado en el apartado 3.1.2.

Por otra parte, en la sección 3.2 se menciona el proceso que se ha seguido para la obtención y limpieza de los datos. A continuación, se muestran fragmentos de dicho código, así como los ficheros de texto generados. La Figura 33 corresponde al código utilizado para tratar el documento generado por Vector Table y la Figura 34 el código de limpieza usado en el fichero generado por Osculating Orbital Elements.

Las variables que finalmente han sido registradas se han especificado en cada sección correspondiente. Todas ellas son variables numéricas o de tiempo, no se ha recogido ninguna variable categórica de interés. Las Figuras 35 y 36 muestran un fragmento de los archivos escritos y guardados.

Figura 33

Imagen de un fragmento del código 1

```
rows = file.readlines()
data = False

for row in rows:
    elements = row.split(' ')

    # los datos comienzan cuando llega la línea $$SOE, antes de eso hay otra información
    if elements[0].startswith('$$SOE'):
        data = True
    elif elements[0].startswith('$$EOE'): # con esto se determina cuando acaba la entrada de datos y está la explicación de las variables
        data = False

    if data:
        # primero selecciono la fecha
        if elements[0].startswith('24'):
            fecha = datetime.strptime(f"{elements[3]} {elements[4]}", "%Y-%b-%d %H:%M:%S.%f")

        # ahora obtengo los datos de posición y velocidad
        if len(elements) > 1 and elements[1] == 'XYZ':
            filtered_list = [item for item in elements if item]

            posX = float(filtered_list[2])
            posY = float(filtered_list[3])
            posZ = float(filtered_list[4])

            velX = float(filtered_list[5])
            velY = float(filtered_list[6])
            velZ = float(filtered_list[7])

        # ahora que tengo los datos, los guardo en el documento
        registros.append({'Fecha': fecha,
                          'PosicionX': posX,
                          'PosicionY': posY,
                          'PosicionZ': posZ,
                          'VelocidadX': velX,
                          'VelocidadY': velY,
                          'VelocidadZ': velZ
                          })
```

Nota. Imagen donde se muestra la parte del código donde se lee y organiza la información del primer documento. Utilizado en el apartado [3.2](#).

Figura 34

Imagen de un fragmento del código 2

```
for row in rows:
    elements = row.split(' ')

    # los datos comienzan cuando llega la linea $$SOE, antes de eso hay otra información
    if elements[0].startswith('$$SOE'):
        data = True
    elif elements[0].startswith('$$EOE'): # con esto se determina cuando acaba la entrada de datos y está la explicación de las variables
        data = False

    if data:
        # primero selecciono la fecha
        if elements[0].startswith('24'):
            fecha = datetime.strptime(f"{elements[3]} {elements[4]}", "%Y-%b-%d %H:%M:%S.%f")

        # ahora obtengo la excentricidad, la distancia de periapsis y la inclinación
        elif len(elements)>1 and elements[1] == 'EC':
            filtered_list = [item for item in elements if item]

            e = float(filtered_list[1])
            periDist = float(filtered_list[3])
            inclin = float(filtered_list[5])

        # ahora el tiempo de periapsis y el periodo de orbita sideral
        elif len(elements)>1 and elements[1] == 'OM':
            filtered_list = [item for item in elements if item]

            omega = float(filtered_list[1])
            w = float(filtered_list[4])
            timePer = float(filtered_list[6])
            # hay que pasarlo a calendario gregoriano
            timePer = datetime(2000, 1, 1) + timedelta(days=timePer-2451545.0)

        elif len(elements)>1 and elements[1] == 'N':
            filtered_list = [item for item in elements if item]

            nu = float(filtered_list[6])

        elif len(elements)>1 and elements[1] == 'A':
            filtered_list = [item for item in elements if item]

            semiaxis = float(filtered_list[2])
            apodist = float(filtered_list[4])
            period = float(filtered_list[6])

        # ahora que tengo los datos, los guardo en el documento
        registros.append({'Fecha': fecha,
                        'e': e,
                        'q': periDist,
                        'i': inclin,
                        'omega': omega,
                        'w': w,
                        'Time_of_periapsis': timePer,
                        'f': nu,
                        'a': semiaxis,
                        'Apoapsis_distance': apodist,
                        'Sideral_orbit_period': period
                        })
```

Nota. Imagen donde se muestra la parte del código donde se lee y organiza la información del segundo documento. Utilizado en el apartado 3.2.

Figura 35

Imagen de un fragmento del nuevo documento generado con el código 1 de la Figura 19

Fecha	X	Y	Z	VX	VY	VZ
1 2014-10-21 00:00:00	-398562.030	41004.7716	-15643.42057	-0.073245139	-0.975971953	0.0831771474
2 2014-10-21 04:00:00	-399359.721	26925.0862	-14435.70353	-0.037514790	-0.979329527	0.0845437955
3 2014-10-21 08:00:00	-399641.676	12806.1697	-13209.06981	-0.001621901	-0.981418700	0.0858040817
4 2014-10-21 12:00:00	-399405.850	-1333.6283	-11965.06731	0.034392273	-0.982227884	0.0869557584
5 2014-10-21 16:00:00	-398650.798	-15475.7990	-10705.27575	0.070485590	-0.981746611	0.0879966504
6 2014-10-21 20:00:00	-397375.691	-29601.6917	-9431.30562	0.106615039	-0.979965603	0.0889246612
7 2014-10-22 00:00:00	-395580.322	-43692.5309	-8144.79700	0.142736753	-0.976876843	0.0897377803
8 2014-10-22 04:00:00	-393265.124	-57729.4353	-6847.41825	0.178806038	-0.972473649	0.0904340902
9 2014-10-22 08:00:00	-390431.178	-71693.4372	-5540.86463	0.214777400	-0.966750753	0.0910117738
10 2014-10-22 12:00:00	-387080.227	-85565.5040	-4226.85679	0.250604584	-0.959704366	0.0914691220
11 2014-10-22 16:00:00	-383214.684	-99326.5593	-2907.13919	0.286240617	-0.951332261	0.0918045417
12 2014-10-22 20:00:00	-378837.643	-112957.5065	-1583.47832	0.321637854	-0.941633841	0.0920165631
13 2014-10-23 00:00:00	-373952.891	-126439.2526	-257.66093	0.356748040	-0.930610208	0.0921038480
14 2014-10-23 04:00:00	-368564.912	-139752.7330	1068.50798	0.391522362	-0.918264239	0.0920651973
15 2014-10-23 08:00:00	-362678.896	-152878.9378	2393.20719	0.425911527	-0.904600645	0.0918995594
16 2014-10-23 12:00:00	-356300.747	-165798.9384	3714.60142	0.459865826	-0.889626040	0.0916060373
17 2014-10-23 16:00:00	-349437.087	-178493.9157	5030.84367	0.493335224	-0.873348995	0.0911838965
18 2014-10-23 20:00:00	-342095.261	-190945.1883	6340.07754	0.526269435	-0.855780101	0.0906325725
19 2014-10-24 00:00:00	-334283.339	-203134.2421	7640.43978	0.558618019	-0.836932012	0.0899516776
20 2014-10-24 04:00:00	-326010.116	-215042.7606	8930.06290	0.590330474	-0.816819497	0.0891410080

Nota. Imagen donde se muestra la parte del nuevo fichero de datos para el vector estado con los valores organizados. Utilizado en el apartado 3.2.

Figura 36

Imagen de un fragmento del nuevo documento generado con el código 2 de la Figura 20

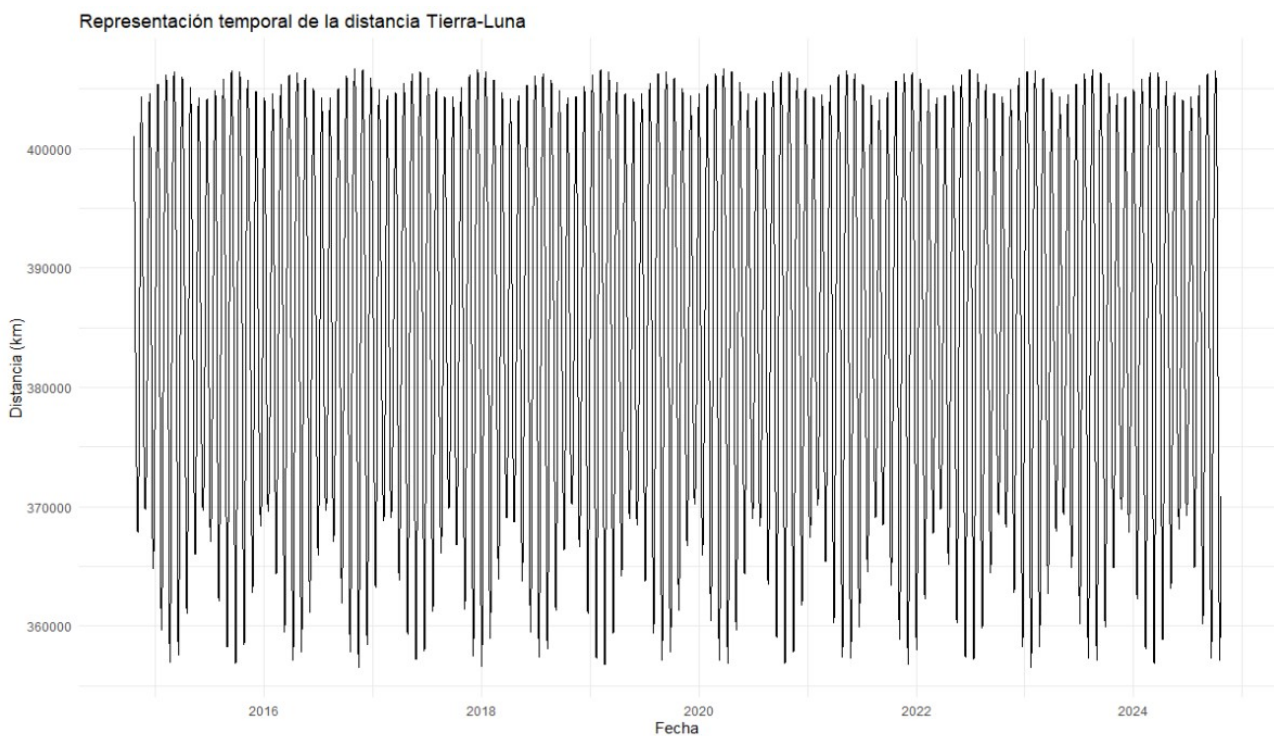
Fecha	e	q	i	Omega	w	Time_of_periapsis	f	a	Apoapsis_distance	Sideral_orbit_period
1 2014-10-21 00:00:00	0.05146040	365269.6	5.289139	199.0708	119.9717	2014-10-31 06:06:33.615487	214.9898018	385086.2	404902.9	2363706
2 2014-10-21 04:00:00	0.05081637	365728.1	5.288720	199.0729	119.7891	2014-10-31 06:03:28.061354	217.1931212	385308.1	404888.0	2365748
3 2014-10-21 08:00:00	0.05018306	366175.4	5.288279	199.0748	119.6081	2014-10-31 06:00:06.038068	219.4001196	385522.1	404868.7	2367719
4 2014-10-21 12:00:00	0.04956163	366610.0	5.287816	199.0766	119.4308	2014-10-31 05:56:38.207089	221.6088747	385727.2	404844.5	2369610
5 2014-10-21 16:00:00	0.04895304	367030.5	5.287332	199.0783	119.2596	2014-10-31 05:53:16.646605	223.8172753	385922.6	404814.7	2371410
6 2014-10-21 20:00:00	0.04835806	367435.9	5.286827	199.0799	119.0968	2014-10-31 05:50:14.735019	226.0230405	386107.3	404778.7	2373113
7 2014-10-22 00:00:00	0.04777727	367824.9	5.286301	199.0813	118.9451	2014-10-31 05:47:47.006873	228.2237422	386280.4	404735.8	2374709
8 2014-10-22 04:00:00	0.04721109	368196.7	5.285756	199.0825	118.8070	2014-10-31 05:46:08.985075	230.4166315	386441.0	404685.3	2376190
9 2014-10-22 08:00:00	0.04665972	368550.2	5.285193	199.0836	118.6854	2014-10-31 05:45:36.990358	232.5996675	386588.3	404626.4	2377549
10 2014-10-22 12:00:00	0.04612320	368884.9	5.284611	199.0844	118.5830	2014-10-31 05:46:27.932870	234.7695487	386721.7	404558.5	2378779
11 2014-10-22 16:00:00	0.04560140	369199.9	5.284014	199.0851	118.5027	2014-10-31 05:48:59.090328	236.9237452	386840.4	404480.9	2379875
12 2014-10-22 20:00:00	0.04509402	369494.9	5.283401	199.0855	118.4473	2014-10-31 05:53:27.877524	239.0595330	386943.8	404392.6	2380829
13 2014-10-23 00:00:00	0.04460063	369769.5	5.282774	199.0857	118.4196	2014-10-31 06:00:11.612087	241.1742276	387031.3	404293.2	2381637
14 2014-10-23 04:00:00	0.04412068	370023.3	5.282135	199.0856	118.4221	2014-10-31 06:09:27.282459	243.2652171	387102.6	404181.8	2382294
15 2014-10-23 08:00:00	0.04365350	370256.3	5.281485	199.0852	118.4575	2014-10-31 06:21:31.322225	245.3299946	387157.1	404057.8	2382798
16 2014-10-23 12:00:00	0.04319834	370468.4	5.280826	199.0846	118.5282	2014-10-31 06:36:39.395634	247.3661882	387194.5	403920.7	2383143
17 2014-10-23 16:00:00	0.04275439	370659.6	5.280160	199.0837	118.6363	2014-10-31 06:55:06.198362	249.3715891	387214.7	403769.8	2383329
18 2014-10-23 20:00:00	0.04232079	370830.0	5.279487	199.0826	118.7840	2014-10-31 07:17:05.275697	251.3441768	387217.4	403604.7	2383354
19 2014-10-24 00:00:00	0.04189668	370980.1	5.278811	199.0811	118.9730	2014-10-31 07:42:48.860726	253.2821416	387202.6	403425.1	2383218
20 2014-10-24 04:00:00	0.04148117	371110.0	5.278132	199.0794	119.2048	2014-10-31 08:12:27.734079	255.1839038	387170.3	403230.5	2382919

Nota. Imagen donde se muestra la parte del nuevo fichero de datos para los elementos orbitales con los valores organizados. Utilizado en el apartado 3.2.

Seguidamente, en el apartado 4.1 se habla a cerca del comportamiento de la distancia entre la Tierra y la Luna a lo largo del tiempo. Se comenta que el conjunto de datos es bastante grande y que por ello se selecciona un periodo de tiempo menor para poder observar mejor los periodos. En la Figura 37 se ve la representación gráfica de lo nombrado. A pesar de no ser una gráfica muy clara por el número tan alto de datos, se ve bastante bien el patrón en la distancia que corresponde a las órbitas del satélite natural.

Figura 37

Gráfica de la distancia entre la Tierra y la Luna entre las fechas 21/10/2014 y 21/10/2024



Nota. La gráfica muestra la distancia que existe entre el punto central (tomado la Tierra) y el cuerpo objetivo, en este caso la Luna, a lo largo de 10 años. Esto es para observar el comportamiento cíclico de la órbita y la distancia. Utilizado en el apartado [4.1](#).

En el apartado 5 se comenta el error cometido al realizar las transformaciones respecto a los datos obtenidos.

En la Tabla 4 se muestra el error cometido en los primeros 10 valores para cada variable de posición y velocidad con la precisión por defecto de RStudio, que se puede comparar con la Tabla 1 de ese mismo apartado.

Tabla 4

Tabla de error cometido al calcular los elementos orbitales en cada eje con doble precisión en los 10 primeros valores del dataset

e	a	i	Ω	f	w	p
-5.393579 e-16	1.511549 e-16	2.686799 e-15	0.000000 e+00	1.5864032 e-15	-2.9612928 e-15	1.515562 e-16
3.0040650 e-15	1.510679 e-16	1.091599 e-14	-2.855408 e-16	2.617183 e-16	-4.745292 e-16	1.514590 e-16
-1.3827163 e-15	3.019680 e-16	1.965041 e-14	-1.427690 e-16	5.181713 e-16	-9.504945 e-16	3.027304 e-16
-5.3202035 e-15	-3.018074 e-16	4.367141 e-15	0.000000 e+00	-3.847550 e-16	5.949407 e-16	-3.025505 e-16
1.7009512 e-15	-1.508273 e-16	-2.183770 e-15	0.000000 e+00	-3.809587 e-16	3.574770 e-16	-1.511896 e-16
-4.3046978 e-15	6.030206 e-16	5.375949 e-15	2.855307 e-16	7.544817 e-16	-1.3125405 e-15	6.044340 e-16
1.5975761 e-15	0.000000 e+00	8.568770 e-15	0.000000 e+00	2.490688 e-16	-1.194741 e-16	0.000000 e+00
2.2046389 e-15	-1.506250 e-16	5.040973 e-16	0.000000 e+00	-1.233491 e-16	-8.372907 e-16	-1.509614 e-16
-7.435636 e-16	6.022702 e-16	1.125937 e-14	-1.427627 e-16	1.7106814 e-15	-3.9512726 e-15	6.035843 e-16
-3.0088517 e-03	0.000000 e+00	6.050478 e-15	1.427621 e-16	-2.421243 e-16	2.396778 e-16	0.000000 e+00

En la Tabla 5 se muestra el error cometido con los valores por defecto del programa RStudio en la precisión de los valores de los números de coma flotante.

Tabla 5

Tabla de error cometido al calcular la posición y la velocidad en cada eje con doble precisión en los 10 primeros valores del dataset

x	y	z	vx	vy	vz
1.460442e-16	1.419534e-15	1.162782e-15	-9.473521e-16	2.275113e-16	-1.668462e-16
1.457525e-16	8.377120e-15	-3.780189e-16	1.29474954e-14	0.000000e+00	1.641491e-16
-1.456496e-16	2.087989e-14	6.88538e-16	4.176638983e-13	-1.131243e-16	-3.234762e-16
-5.829425e-16	1.391219e-13	-2.128350e-15	8.0702941e-15	4.521244e-16	7.979798e-16
0.000000e+00	-1.245899e-14	1.869068e-15	-6.1035372e-15	-1.130865e-16	-1.577081e-16
0.000000e+00	2.445664e-14	-3.471609e-15	1.62709078e-14	1.766964e-4	1.560623e-16
-1.47145e-16	1.415474e-14	-6.141615e-15	1.12782682e-14	-3.409508e-16	-3.092964e-16
-1.480112e-16	8.948520e-15	-5.312920e-15	7.7613642e-15	-2.283297e-16	0.000000e+00
5.963423e-16	-8.524915e-15	5.416722e-15	-6.7199339e-15	2.296813e-16	0.000000e+00
-1.503762e-16	8.503377e-16	4.948921e-15	6.645268e-16	2.313677e-16	3.034420e-16

9. REFERENCIAS

- Abad, A. A. (2012). *Astrodinámica*. Bubok Publishing S.L.
- Castillo C, K. (28 de agosto de 2017). *Excentricidad*. Obtenido de Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/ZnAmaDV6>
- Cook, J. D. (18 de marzo de 2020). *Extended floating point precision in R and C*. Obtenido de John D. Cook Consulting: <https://www.johndcook.com/blog/2020/03/18/gnu-mpfr-wrapper/>
- Giraldo, C. (2024). NASA's 2023 Space Station Achievements. *International Space Station Program Research Office*.
- Gutzwiller, M. C. (1998). Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem. *Reviews of Modern Physics*, 70(2), 590-612.
- HorizonsEphemerisData*. (2022). Obtenido de Wolfram Function Repository: <https://resources.wolframcloud.com/FunctionRepository/resources/HorizonsEphemerisData>
- ILRS Data Format and Procedures Working Group. (19 de septiembre de 2019). *ILRS NASA*. Obtenido de https://ilrs.gsfc.nasa.gov/docs/2022/crd_v2.01e3.pdf
- Kepler Orbit. (s.f.). Obtenido de Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_orbit
- Kepler's Laws of Planetary Motion*. (s.f.). Obtenido de Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_laws_of_planetary_motion
- Leyes de Kepler*. (s.f.). Obtenido de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kepler
- NASA Science Editorial Team. (27 de febrero de 2020). *Milankovitch (Orbital) Cycles and Their Role in Earth's Climate*. Obtenido de NASA: <https://science.nasa.gov/science-research/earth-science/milankovitch-orbital-cycles-and-their-role-in-earths-climate/>
- O'Connor, J., & Robertson, E. (febrero de 1999). *Anaxágoras de Clazómenas*. Obtenido de Tutor de Mac: https://mathshistory-st-andrews-ac-uk.translate.goog/Biographies/Anaxagoras/?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=es&_x_tr_hl=es&_x_tr_pto=rq
- Ong Cheon, R. (2017). *Biblioteca Virtual Senior*. Obtenido de <https://bibliotecavirtualesenior.es/wp-content/uploads/2018/06/La-influencia-de-la-luna.pdf>
- Órbita de Kepler*. (s.f.). Obtenido de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%93rbita_de_Kepler

- Park, R. (s.f.). *Solar System Dynamics* NASA. Obtenido de <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/tutorial.html>
- Park, R. (s.f.). *Solar System Dynamics* NASA. Obtenido de <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/>
- Park, R. (s.f.). *Solar System Dynamics* NASA. Obtenido de <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/tutorial.html#example>
- Precesión apsidal.* (s.f.). Obtenido de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Precesi%C3%B3n_apsidal
- Tejada, E. C. (2015). *UF1472-Lenguajes de definición y modificación de datos SQL*. Editorial Elearning, 100-102.
- The Orbit Equation.* (s.f.). Obtenido de Wikipedia: <https://orbital-mechanics.space/the-orbit-equation/the-orbit-equation.html>
- Trivedi, P. (2023). Determining Earth's Size, Lunar Distance, and Solar Distance. *The National High School Journal of Science*, 1-2.
- Tyahla, L. J. (16 de diciembre de 2024). *CDDIS NASA's Archive of Space Geodesy Data*. Obtenido de <https://cddis.nasa.gov/archive/>
- Weber, B. (s.f.). *Orbital Mechanics & Astrodynamics*. Obtenido de Orbital Mechanics Space: <https://orbital-mechanics.space/classical-orbital-elements/classical-orbital-elements.html>
- Wolfram Alpha.* (s.f.). Obtenido de <https://www.wolframalpha.com/>
- YArquitectura.* (s.f.). Obtenido de <https://www.yarquitectura.com/arquitectura-ansi-sparc-de-una-base-de-datos/>

10. BIBLIOGRAFÍA

(s.f.). Obtenido de https://cran.r-project.org/doc/FAQ/R-FAQ.html#Why-doesn_0027t-R-think-these-numbers-are-equal_003f

Ascensión Recta. (s.f.). Obtenido de Wikipedia:
https://es.wikipedia.org/wiki/Ascensi%C3%B3n_recta

Chapront-Touzé, M., & Chapront, J. (1983). The lunar ephemeris ELP 2000. *Astronomy and Astrophysics*, 124, 50–62.

Franco García, Á. (2016). *Alejamiento de la Luna*. Obtenido de Dinámica celeste:
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/celeste/alejamiento/alejamiento.html>

Moon Phases (moon phases and derived). (s.f.). Obtenido de Papers with code:
<https://paperswithcode.com/dataset/moon-phases>