

Criterios de convergencia para series

Series fundamentales

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \text{ C} \iff |r| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ C} \iff \alpha > 1.$$

Carácter asintótico de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ C} \iff \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ C}$$

para todo $n_0 > 0$.

Convergencia absoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ C} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ C}.$$

Criterio de comparación: Si $0 \leq a_n \leq b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ C} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ C}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ D} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ D}.$$

Criterio de comparación por paso al límite: Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = \ell$, entonces

- Si $\ell \in (0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ C} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ C}.$
- Si $\ell = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ C} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ C}.$
- Si $\ell = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ D} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ D}.$

Criterio del cociente: Si $0 \leq a_n$ y $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces

- $\ell < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ C}.$ $\ell > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ D}.$

Criterio de la raíz Si $0 \leq a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, entonces

- $\ell < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ C}.$ $\ell > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ D}.$