

TEMA 3. CÁLCULO VECTORIAL.

1.- Evalúa la integral de línea $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en los casos siguientes:

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, -xy)$, $\Gamma : \mathbf{x} = (t^3, t^4)$, $t \in [0, 1]$.

(b) $\mathbf{F}(x, y) = (e^x, 5xy)$, $\Gamma : \mathbf{x} = (t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, x - z, xyz)$, $\Gamma : \mathbf{x} = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xy, 5z^2)$, $\Gamma : \mathbf{x} = (\sin t, \cos t, t^2)$, $t \in [0, \pi/2]$.

(e) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, -(xy)^{1/3})$, $\Gamma : \mathbf{x} = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$, $t \in [0, 7\pi/2]$.

2.- Analiza si cada uno de los siguientes campos es conservativo en el conjunto D que se indica y halla, cuando exista, una función potencial:

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (2x \sin y + ye^x) \mathbf{i} + (e^x - \sin y + x^2 \cos y) \mathbf{j}$, $D = \mathbb{R}^2$.

(b) $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(c) $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(d) $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

(e) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z^2) \mathbf{i} + (x - 3y^2z) \mathbf{j} + (2xz - y^3) \mathbf{k}$, $D = \mathbb{R}^3$.

(f) $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$, $D = \mathbb{R}^3$.

(g) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz} \mathbf{i} + (xze^{yz} + z) \mathbf{j} + (xye^{yz} + y) \mathbf{k}$, $D = \mathbb{R}^3$.

3.- Sea Γ el segmento que va del punto $(1, 0, 0)$ al punto $(2, 1, 0)$. Halla la integral de línea sobre Γ de cada campo \mathbf{F} definido en los apartados (e), (f) y (g) del problema anterior y comprueba que, cuando \mathbf{F} es conservativo, entonces $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(2, 1, 0) - f(1, 0, 0)$, siendo f una función potencial de \mathbf{F} .

4.- Sea g una función de clase \mathcal{C}^1 en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ simplemente conexo. Prueba que el campo $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ es conservativo en D si y sólo si $\nabla g(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in D$.

5.- ¿Qué trabajo realiza el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y + x^2, x^3 - 1)$ para trasladar una partícula desde el punto $(0, 1)$ hasta el punto $(3, 2)$?

6.- Calcula $\int_{\Gamma} (2xyz - 3y) dx + (x^2z - 3x) dy + (x^2y + 2) dz$, siendo Γ cualquier curva de clase \mathcal{C}^1 a trozos que comience en el punto $(1, 1, 1)$ y acabe en el punto $(1, 2, 4)$.

- 7.– (a) ¿Qué trabajo realiza el campo de fuerzas tridimensional $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{c}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}$ para mover un objeto, sin pasar por el origen, desde un punto \mathbf{x}_1 a otro punto \mathbf{x}_2 situados, respectivamente, a d_1 y d_2 unidades de longitud del origen?
- (b) El afelio y el perihelio son los puntos de la órbita de la Tierra en los que la distancia al Sol es máxima y mínima, respectivamente. Concretamente, en el afelio, la Tierra se encuentra a 1.52×10^8 km del Sol, y en el perihelio, a 1.47×10^8 km. ¿Qué trabajo realiza el campo gravitatorio solar para mover la Tierra desde el afelio al perihelio? (*Nota:* La masa del Sol es 1.99×10^{30} kg, la de la Tierra, 5.97×10^{24} kg, y la constante de gravitación universal G vale 6.67×10^{-11} Nm²/kg²).
- 8.– Halla el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2z - 2xy)\mathbf{i} + (z^2 - x^2)\mathbf{j} + (2yz - 3z^2 + x^3)\mathbf{k}$ para trasladar una partícula desde el punto $(-1, 1, 1)$ hasta el punto $(1, -1, 2)$.
- 9.– Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en todo \mathbb{R} . Prueba que $\oint_{\Gamma} f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0$, donde Γ es cualquier curva de \mathbb{R}^2 cerrada, simple y de clase \mathcal{C}^1 a trozos. ¿Siguen siendo cierto este resultado si f tan sólo es continua?
- 10.– Calcula las siguientes integrales de línea usando el teorema de Green:
- (a) $\oint_{\Gamma} y^3 dx - x^3 dy$, siendo Γ la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo.
- (b) $\oint_{\Gamma} x^2y dx + 3yx^2 dy$, donde Γ es la frontera del rectángulo $[1, 2] \times [1, 2]$.
- (c) $\oint_{\Gamma} (6y + x) dx + (y + 2x) dy$, siendo Γ la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
- (d) $\oint_{\Gamma} 2xy^3 dx + 4x^2y^2 dy$, donde Γ es el borde de la región limitada por la curva $y = x^3$ y las rectas $x = 1$ e $y = 0$.
- 11.– Halla el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (3x + 4y)\mathbf{i} + (8x + 9y)\mathbf{j}$ sobre una partícula que recorre una sola vez, en el sentido de las agujas del reloj, la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$:
- (a) evaluando directamente la correspondiente integral de línea;
- (b) usando el teorema de Green.
- 12.– Calcula $\oint_{\Gamma} xy^2 dx + (x^2y + 2x) dy$, siendo Γ el borde, positivamente orientado, de un cuadrado cualquiera.
- 13.– (a) ¿Cómo extenderías la segunda forma vectorial del teorema de Green a un conjunto doblemente conexo?
- (b) Calcula el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ a través de cualquier curva cerrada simple que rodee el origen.

14.– Sea S la porción del paraboloido $z = 1 - x^2 - y^2$ situada por encima del plano $z = 0$. Sea Γ la curva intersección de tales paraboloido y plano. Orienta coherentemente S y Γ y, dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$, comprueba que se cumple el teorema de Stokes (i.e. que $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$).

15.– Calcula $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en los casos siguientes:

(a) Γ : curva intersección de los planos coordenados con la porción del cono $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$ situada en el primer octante, $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz - y) \mathbf{i} + (x - xz) \mathbf{j}$.

(b) Γ : curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el paraboloido elíptico $z = x^2 + 2y^2$, $\mathbf{F}(x, y, z) = 4yz \mathbf{i} + 2xz \mathbf{j} + 3xy \mathbf{k}$.

(c) Γ : triángulo intersección del prisma de lados $y = 0$, $x + y = 1$ y $-2x + y = 1$ con el plano $y + z = 1$, $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + xe^{z^2} \mathbf{j} + e^{yz} \mathbf{k}$.

(d) Γ : curva intersección del cilindro elíptico $x^2 + y^2 = 1$ y el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$, $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + 2xz \mathbf{j} + x(y + 1) \mathbf{k}$.

16.– Sea Γ la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = y$ y el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Elige una orientación para Γ y calcula la circulación a lo largo de Γ del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, x(z + 3), xy)$.

17.– Sea Γ la curva intersección del paraboloido $z = 1 - x^2 - y^2$ y el prisma rectangular de lados $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ e $y = 1$. Halla el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, -xz, xy)$ para desplazar una partícula a lo largo de Γ .

18.– Sea Γ la curva intersección del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ y el paraboloido elíptico $z = 2x^2 + y^2$. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{j} - \frac{xy}{2} \mathbf{k}$, calcula $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$:

(a) directamente, usando la siguiente parametrización de Γ :

$$\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 4 - 2 \sin^2 t), \quad t \in [0, 2\pi];$$

(b) mediante el teorema de Stokes.

19.– Sea Γ la curva intersección de los paraboloides $z = 16 - x^2 - y^2$ y $z = 16 + x^2 + y^2 - 8y$. Orienta Γ de modo que su proyección sobre el plano xy tenga sentido negativo y calcula la circulación a lo largo de Γ del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, -xz, z)$.

20.– Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase \mathcal{C}^2 . Sean S_1 y S_2 , respectivamente, las superficies de los hemisferios superior e inferior de una esfera de radio a centrada en el origen. Halla la relación que existe entre $\iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ y $\iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$, siendo \mathbf{n} el vector unitario normal exterior en cada punto de la esfera.

21.– Halla $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ en los casos siguientes:

- (a) S : superficie del sólido comprendido entre el paraboloides $z - 1 = (x - 1)^2 + y^2$ y el plano $2x + z - 6 = 0$, $\mathbf{F}(x, y, z) = (x \operatorname{sen}^2 y, y, z \operatorname{cos}^2 y)$.
- (b) S : superficie del sólido limitado por el cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 16$ y los planos $x = 0$, $z = 0$ y $z = y$, $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz, y, -z^2)$.
- (c) S : superficie del sólido limitado por el cono $x^2 + (y - 1)^2 = z^2$ y el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3y - 3xz, 2yz - x^2y^2, z^2 - x^2yz)$.

22.- Sea Q el sólido limitado por los paraboloides elípticos $z = 2x^2 + 2y^2$ y $z = x^2 + y^2 + 4$. Calcula el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (1 - x^2, 2 - y^2, 3z + x^2 + y^2)$ a través de la superficie de Q .

23.- Sea S la superficie del sólido limitado por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6x$ y por abajo, por el cilindro parabólico $z^2 = 4x$, con $z \geq 0$. Calcula el flujo hacia afuera de S del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{y^2}{2} - xz - \frac{z^2}{2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{x^2}{2} - yz - \frac{z^2}{2} \right) \mathbf{j}.$$

24.- Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z^2) \mathbf{i} + x \mathbf{j} + 2z(x + 1) \mathbf{k}$ el campo de velocidades de un fluido. Calcula el flujo del fluido hacia el exterior del elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

25.- Sea S la superficie del sólido comprendido entre el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el hemisferio superior de la esfera $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$. Halla el flujo saliente a través de S del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - 2xy, y^2 - yz, z^2)$.

26.- Calcula el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2z - 2xy, z^2 - x^2, 2yz - 3z^2 + x^3)$ a través de la superficie del sólido limitado por el hiperboloide $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 4$, el plano $z = 0$ y la hoja superior del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.

27.- (a) Generaliza el teorema de la divergencia al caso de un sólido comprendido entre dos superficies cerradas (por ejemplo, dos esferas concéntricas).

(b) Deduce la *ley de Gauss* del campo eléctrico: Sea $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$ la intensidad del campo eléctrico generado por una carga q colocada en el punto $(0, 0, 0)$, donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ y ϵ es la permitividad del medio material en que se halla la carga. Sea S una superficie diferenciable cerrada situada en el mismo medio material. Entonces, el flujo saliente del campo eléctrico \mathbf{E} a través de S es q/ϵ , si el origen está en el interior del sólido limitado por S , ó 0, si el origen está en el exterior.

28.- Sea Q el sólido limitado por el plano xy , y las superficies de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = (z - 4)^2, \text{ con } z \leq 4, \text{ y } x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

Dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2, xz + y, xy + y^3 + z)$, halla el flujo de $\mathbf{F}(x, y, z)$ a través de S que limita al sólido Q .

29.- Sea S la superficie del sólido Q limitado por el plano $4y + z - 5 = 0$ y el paraboloides $z = x^2 + (y - 2)^2$. Consideremos la curva Γ intersección del plano y el paraboloides orientada positivamente. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, y, z)$

- (a) calcula la integral de $\mathbf{F}(x, y, z)$ a lo largo de Γ ,
(b) halla el flujo de $\mathbf{F}(x, y, z)$ a través de S .

TEMA 3: SOLUCIONES

1.- (a) 19/143. (b) $e + 7/8$. (c) 4/5. (d) $\pi^6/32 - 1/3$. (e) $-1/2$.

2.- (a) Conservativo, función potencial: $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y + ye^x + \cos y$.

(b) Conservativo, función potencial: $f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$.

(c) No conservativo.

(d) Conservativo, función potencial: $f(x, y) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

(e) Conservativo, función potencial: $f(x, y, z) = xy + xz^2 - y^3z$.

(f) No conservativo.

(g) Conservativo, función potencial: $f(x, y, z) = xe^{yz} + yz$.

3.- (e) 2. (f) 5/6. (g) 1.

4.- Basta con observar que $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla g(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in D$.

5.- 62.

6.- 10.

7.- (a) El campo \mathbf{F} es conservativo en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ y una función potencial es $f(\mathbf{x}) = \frac{-c}{\|\mathbf{x}\|}$.

Por tanto, si Γ es la trayectoria seguida desde \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 , el trabajo realizado por \mathbf{F} es

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) = \frac{c}{d_1} - \frac{c}{d_2}.$$

(b) Situando el centro del Sol en el origen de un sistema de referencia cartesiano, se puede expresar el campo gravitatorio \mathbf{F} con que el Sol atrae a la Tierra como en el apartado (a) con $c = -GMm$, siendo M y m las masas del Sol y de la Tierra, y G , la constante de gravitación universal. Por consiguiente, el trabajo realizado por \mathbf{F} para llevar la Tierra del afelio al perihelio es $-GMm \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = 1.77 \times 10^{32} J$, donde $d_1 = 1.52 \times 10^{11}$ m y $d_2 = 1.47 \times 10^{11}$ m.

8.- -7.

9.- Como f es derivable en \mathbb{R} , el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ es de clase \mathcal{C}^1 en \mathbb{R}^2 . Sea Γ cualquier curva de \mathbb{R}^2 cerrada y simple, que podemos suponer orientada positivamente. Indicando por D la región limitada por Γ , se tiene entonces, por el teorema de Green:

$$\oint_{\Gamma} f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = \iint_D (2xyf'(x^2 + y^2) - 2xyf'(x^2 + y^2)) dx dy = 0.$$

Se llega a idéntica conclusión aplicando, simplemente, que \mathbf{F} es un campo conservativo en \mathbb{R}^2 . Nótese que, si g es una primitiva cualquiera de f (que existe por ser f continua), la función $G(x, y) = \frac{1}{2}g(x^2 + y^2)$ es, en efecto, una función potencial de \mathbf{F} . Según este razonamiento, basta, por tanto, con exigir tan sólo la continuidad de f .

10.- (a) $-3\pi/2$. (b) $67/6$. (c) 16π . (d) $2/33$.

11.- -24π .

12.- $2l^2$, donde l es la longitud del lado del cuadrado.

13.- (a) Sea Γ_1 una curva cerrada, simple y positivamente orientada. Sea Γ_2 una curva cerrada, simple, negativamente orientada y contenida en la región limitada por Γ_1 . En cada punto de Γ_1 y Γ_2 , sea \mathbf{n} un vector normal unitario, orientado hacia el exterior de la región D comprendida entre Γ_1 y Γ_2 . Si \mathbf{F} es un campo de clase \mathcal{C}^1 en un abierto que contenga a D , entonces

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy.$$

(b) 0.

14.- $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \pm\pi$ (el signo depende de la orientación dada a Γ).

15.- (a) $\pm\pi/2$. (b) $\pm 3\pi$. (c) $\pm 3(e-1)/4$. (d) $\pm 15\pi/4$.

16.- $\pm 3\pi/4$.

17.- $8/3$.

18.- 8π .

19.- 32π .

20.- Denotando por Q la esfera y por S toda su superficie, del teorema de Gauss se sigue que

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_Q \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = 0,$$

ya que, como \mathbf{F} es de clase \mathcal{C}^2 , $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$. Por tanto,

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

También se podría haber razonado usando el teorema de Stokes: Si Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano xy , orientada positivamente, se tiene:

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

21.- (a) 16π . (b) $16/3$. (c) $\pi/32$.

22.- 24π .

23. $-\pi/2$.

24. $-32\pi/3$.

25. $-\pi$.

26. $-51\pi/2$.

28. -96π .

29. (a) 0.

(b) $\pi/2$.