UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

OLIMPIADA DE FÍSICA

FASE LOCAL

6 de Marzo de 2012

Apellidos, Nombre:..

Centro de Estudio:..

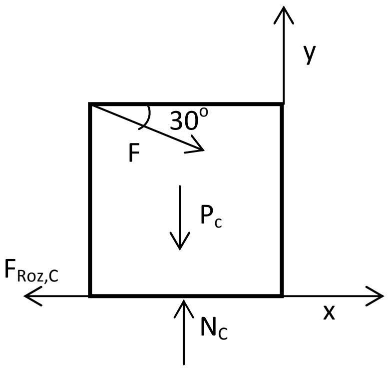
En la prueba de selección se plantean 9 problemas de los que cada participante deberá realizar 8 de ellos.

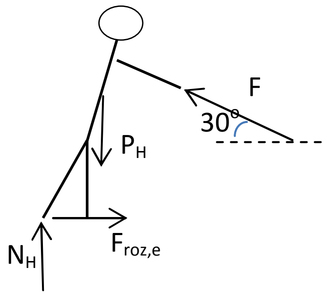
Indicar rodeando con un círculo el problema desechado
1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 - 9

1. Un hombre de 75 kg empuja una caja pesada por un piso horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el piso y la caja es de 0,2 y el coeficiente de rozamiento estático entre los zapatos del hombre y el piso es de 0,8. El hombre empuja hacia abajo contra la caja a un ángulo de 30º con la horizontal ¿Cuál es la máxima masa de la caja que puede mover con velocidad constante?

Solución

Aislamos la caja y el hombre dibujando las fuerzas que actúan sobre ellos





Como en el carro y el hombre la aceleración es nula, se verifica en ambos $\sum \vec{F} = 0$

$$Hombre \begin{cases} \sum F_x = F_{roz,e} - Fcos30^o = 0 \\ \sum F_y = Fsen30^o - P_H + N_H = 0 \\ F_{roz,e} \le \mu_e N_H \end{cases} \quad Caja \begin{cases} \sum F_x = Fcos30^o - F_{roz,c} = 0 \\ \sum F_y = N_C - Fsen30^o - P_C = 0 \\ F_{roz,c} = \mu_c N_C \end{cases}$$

La fuerza F máxima con la que el hombre puede empujar la caja corresponde a una fuerza de rozamiento estática máxima. Sustituyendo en las ecuaciones del hombre

$$Fcos30^o = \mu_e(m_H g - Fsen30^o) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\mu_e m_H g}{(cos30^o + \mu_e sen30^o)}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de la caja

$$Fcos30^o = \mu_C(m_C g + Fsen30^o) \Rightarrow \frac{\mu_e m_H g(cos30^o - \mu_C sen30^o)}{(cos30^o + \mu_e sen30^o)} = \mu_C m_C g$$

De donde

$$m_C = \frac{\mu_e m_H(cos30^o - \mu_C sen30^o)}{\mu_C(cos30^o + \mu_e sen30^o)} = 181{,}52\ kg$$

2. Aunque habitualmente la segunda ley de Newton se expresa como $\vec{F} = m\vec{a}$ esta sólo es válida si la masa m es constante. En el caso más general en el que la masa no sea constante la expresión de la segunda ley de Newton es $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ donde $\vec{p} = m\vec{v}$ es el momento lineal. Tengamos en cuenta esta precisión en el ejemplo siguiente. Un vagón de masa m_o se mueve libremente y sin ningún tipo de rozamiento por una vía horizontal con velocidad v_o. Comienza a llover verticalmente y el vagón se empieza a llenar de agua a razón de f kg/s. Parece evidente que aunque no hay ninguna fuerza horizontal, la velocidad del vagón empieza a cambiar y por tanto a sufrir una aceleración.
    a. Hallar la expresión de la velocidad y de la posición con el tiempo.
    b. ¿Qué fuerza exterior debemos hacer para conseguir que el vagón no se pare y por tanto la velocidad se mantenga constante?

Solución

a) *Velocidad*

Opción 1: Al no haber fuerzas exteriores en dirección horizontal $F = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \ m\frac{dv}{dt} = -v\frac{dm}{dt} \ \Rightarrow \ (m_0 + ft)\frac{dv}{dt} = -vf \ \Rightarrow -\frac{dv}{v} = \frac{f}{m_0 + ft}dt \ \Rightarrow$$

Integrando

$$\int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v} = \int_0^t \frac{f}{m_0 + ft} dt \Rightarrow$$

$$-\left[Lnv\right]_{v_0}^{v} = \left[Ln(m_0 + ft)\right]_0^t \Rightarrow Ln\frac{v_0}{v} = Ln\frac{m_0 + ft}{m_0} \quad \Rightarrow v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + ft}$$

Opción 2: Al no haber fuerzas exteriores en dirección horizontal al vagón (Eje X), se conserva el momento lineal del vagón en dirección horizontal con lo que

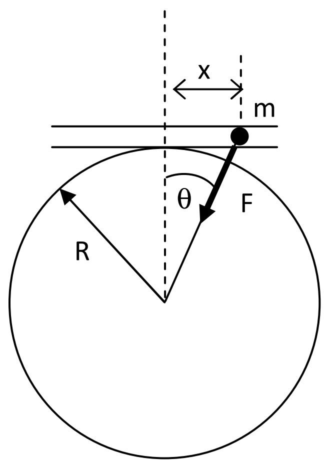
$$p_{ox} = p_{fx} \Rightarrow m_0 v_0 = (m_0 + ft)v \Rightarrow v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + ft}$$

Posición

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \;\Rightarrow \int_{x_o}^{x} dx = \int_0^t vdt \;\Rightarrow x - x_o = \int_0^t \frac{m_o v_o}{m_o + ft} dt$$

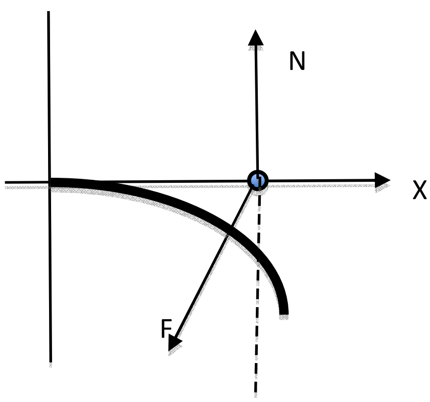
$$x = x_o + \frac{m_o v_o}{f} Ln\left(\frac{m_o + ft}{m_o}\right)$$

b) Si v = cte, $\frac{dv}{dt} = 0 \;\; como \;\; F = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v = fv$ La fuerza necesaria será F = f v_0



3. Una partícula de masa m puede moverse en una tubería horizontal sin rozamiento bajo la acción de la fuerza gravitatoria terrestre. Supongamos que la partícula se abandona a una distancia x muy pequeña comparada con el radio de la Tierra R.
   a. Demostrar que la partícula tiene un movimiento armónico simple.
   b. Demostrar también que el periodo de dicho movimiento es T = $2\pi\sqrt{R/g}$

Solución



a) Aislemos la bola. Se cumplirá, aplicando la segunda ley de Newton, que:

N = F cos θ
F sin θ = ma

Si llamamos l a la distancia desde la bola al centro de la tierra se cumple que $|F| = G\frac{mM}{l^2}$ donde m es la masa de la bola y M la masa de la tierra. Además, a partir del dibujo sen θ = x/l, con lo cual podemos poner

$$-G\frac{mM}{l^2}\frac{x}{l} = ma \;\Rightarrow\; a = -G\frac{M}{l^3}x$$

El signo menos proviene del sentido de la componente X de la fuerza.

Si llamamos d a la distancia desde la superficie de la tierra a la bola se cumple que *l=d+R* donde *R* es el radio de la tierra. Como x es muy pequeño comparado con el radio de la tierra:

$$l^{-3} = (R+d)^{-3} = R^{-3}\left(1+\frac{d}{R}\right)^{-3} \approx R^{-3}\left(1-3\frac{d}{R}+...\right) \approx R^{-3}$$

y la aceleración horizontal de la bola será $a = -G\frac{M}{l^3}x \approx -G\frac{M}{R^3}x$ que es una aceleración del tipo $a = -\omega^2 x$ con ω una constante ($\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$). Esta aceleración origina un MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE.

b) Para hallar el periodo del movimiento sólo tenemos que utilizar que

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ y $g = \frac{GM}{R^2}$, de donde obtenemos T = $2\pi\sqrt{R/g}$

4. En general, cuando se lanza un objeto hacia arriba desde la superficie de la tierra (o desde cualquier otro cuerpo celeste) la atracción gravitatoria lo frena y vuelve a caer. No obstante, si la velocidad supera un cierto valor, denominado velocidad de escape, la atracción gravitatoria no es capaz de retener al objeto y éste escapa definitivamente. A finales del siglo XVIII John Michell y Pierre-Simon Laplace se preguntaron cuál sería el radio R que tendría que tener un objeto de masa M para que la velocidad de escape fuese la velocidad de la luz c. Si un cuerpo celeste tuviese este radio y esta masa, ni la luz podría escapar de la atracción gravitatoria y por lo tanto sería una “estrella oscura” como ellos la llamaron.

   Hoy en día, estos objetos son conocidos como agujeros negros y sus propiedades se estudian en el contexto de la relatividad general (Albert Einstein 1915). Tal como descubrió y estudió Karl Schwarzschild, un agujero negro de masa M define una esfera de radio R (denominado horizonte de sucesos) de la cual ni siquiera la luz puede escapar. A pesar que los cálculos en relatividad general son complejos, lo más curioso de todo es que este radio coincide con el que obtuvieron Michell y Laplace basándose únicamente en la teoría gravitatoria de Newton.

   a. ¿Podrías encontrar una expresión para el radio R del horizonte de sucesos de un agujero negro de masa M?.

   b. ¿Cuál será el radio que tendría que tener un cuerpo con la masa de la Tierra para ser un agujero negro?

(M_{tierra}=5.9743 10^{24} kg, G=6.67 10^{-11} $m^3/Kg\ s^2$, c=299 792 458 m/s)

Solución:

La velocidad de escape v_e es aquella que debe tener la partícula m al lanzarla desde la superficie de un planeta u otro cuerpo celeste para que sea capaz de llegar, en el límite, a una distancia infinita con velocidad nula.

Como la velocidad es nula en el infinito, también lo es su energía cinética Ec=0. Si tomamos la energía potencial gravitatoria Ep=0 en el infinito entonces la energía mecánica E también será nula, E=Ep+Ec=0. Dado que la fuerza gravitatoria es conservativa, la energía mecánica será cero en todo momento, y en particular al abandonar la superficie del objeto celeste.

En la superficie, la energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -G\frac{Mm}{R}$$

Donde M y R son la masa y radio del cuerpo celeste, m la masa de la partícula y G la constante de gravitación universal.

Como en la superficie la partícula se lanza con velocidad v_e, su energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_e^2$$

Por tanto:

$$E = E_p + E_c = -G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0$$

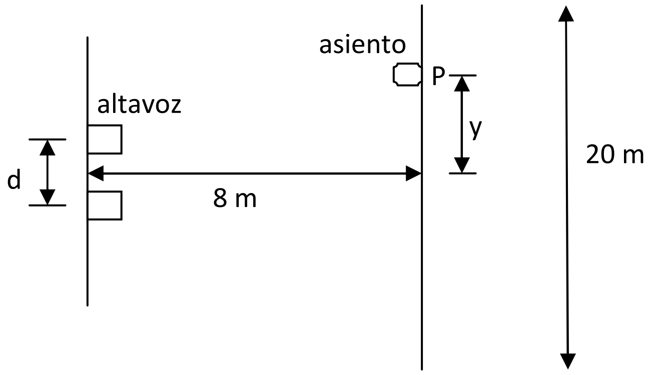
En nuestro caso $v_e = c$, la velocidad de la luz, y simplemente resolviendo para R obtenemos:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Particularizando para $M=M_{Tierra}$ obtenemos el radio del horizonte de sucesos de un agujero negro con una masa igual a la de la tierra.

$$R = 0.89\ cm$$

5. Estamos instalando un equipo de música en el exterior para una representación. Colocamos dos altavoces con una separación d = 1,5 m a lo largo de una línea que llamaremos eje Y. Dichos altavoces reproducen el sonido de una cantante que mantiene durante varios segundos un solo a 880 Hz. Una fila de asientos está colocada en una línea paralela a la de los altavoces y a 8 m de ella. La fila tiene una longitud de 20 m ¿En qué puntos, P, a lo largo de esta línea están los asientos en los que el sonido es más fuerte? (Velocidad del sonido: 343 m/s)



Solución

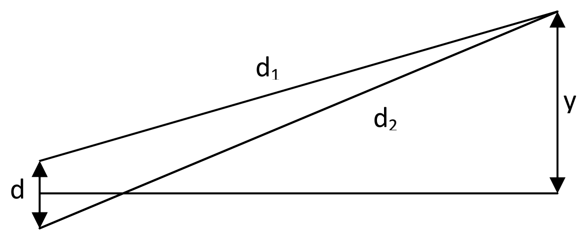
La longitud de onda de las ondas que se propagan es: $\lambda = v/f = 343/880 = 0{,}39\ m$

Condición de interferencia constructiva:

$d_2 - d_1 = n\lambda \qquad (1)$

$$d_2 = \sqrt{(y+\frac{d}{2})^2 + D^2}$$

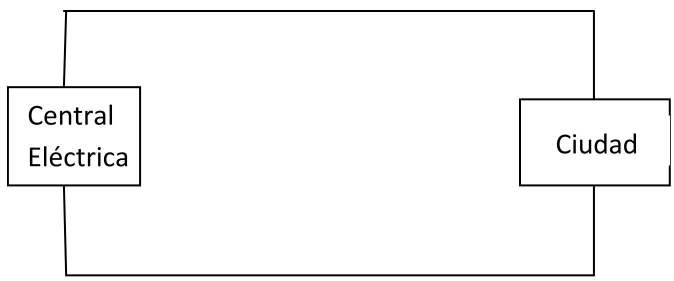
$$d_1 = \sqrt{(y-\frac{d}{2})^2 + D^2}$$



Sustituyendo d_1 y d_2 en la ecuación (1) e imponiendo que $y \leq 10$ m, se obtienen las soluciones

n = 0 $y_o = 0$, n = 1 $y_1 = 2{,}14$ m , n = 2 $y_2 = 4{,}75$ m n = 3 $y_3 = 9{,}44$ m

6. Una línea de transmisión de alto voltaje que conecta una central eléctrica con una ciudad, se compone de un par de cables de aluminio, cada uno con 4Ω de resistencia. La corriente va a la ciudad por un conductor y regresa por otro.
   1. La línea de transmisión entrega a la ciudad $1{,}7\cdot10^5$ kW de potencia a $2{,}3\cdot10^5$ V. ¿Cuánta potencia se pierde por efecto Joule en esta línea?
   2. Si la línea de transmisión tuviera que entregar $1{,}7\cdot10^5$ kW de potencia a 115 V, ¿Cuánta potencia se perdería como calor por efecto Joule?
   3. ¿Es más eficiente transmitir potencia a alto o bajo voltaje?



Solución

a) La corriente en la línea de transmisión es $I = \frac{P}{V} = \frac{1,7 \cdot 10^8}{2,3 \cdot 10^5} = 7,4 \cdot 10^2 A$

La resistencia en la línea es $R = 4 + 4 = 8\Omega$

La potencia perdida por efecto Joule en toda la línea será:

$$P_{perdida} = I^2 R = (7,4 \cdot 10^2)^2 \times 8 = 4,4 \cdot 10^6\, W$$

b) La corriente en este caso es $I = \frac{P}{V} = \frac{1,7 \cdot 10^8}{115} = 1,5 \cdot 10^6 A$

Y la potencia perdida

$$P_{perdida} = I^2 R = (1,5 \cdot 10^6)^2 \times 8 = 1,8 \cdot 10^{13}\, W$$

c) Es más eficiente la transmisión a alto voltaje. A alto voltaje la potencia perdida es un aproximadamente un 3% de la potencia entregada y a bajo voltaje es mucho mayor que la entregada.

7. Dos cargas puntuales q_1=10 nC y q_2=40 nC se encuentran en x=0 y x=15 cm respectivamente.
   a. ¿Dónde habrá que colocar una tercera carga q para que la fuerza neta sobre ella sea cero?
   b. ¿Cuánto valdrá el potencial electrostático en ese punto? (Suponer que el potencial electrostático para puntos muy alejados es cero)

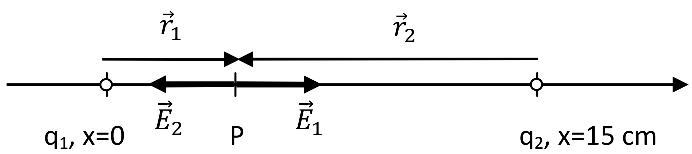
   $\left(K = 9 \cdot 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}\right)$

Solución:

La condición de que la fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una carga q situada en un punto P sea nula es equivalente a que el campo electrostático $\vec{E}$ en un punto P se anule. Siendo el campo $\vec{E}$ la suma de los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ creados por las cargas q_1 y q_2 respectivamente esto equivale a que se cumpla:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$$

Para que la suma de dos vectores se anule, éstos deben ser antiparalelos y de igual módulo. Esto implica necesariamente que el punto P se encuentra en la recta que pasa por ambas cargas, es decir sobre el eje X. Ambas cargas son positivas y por tanto crean un campo radial dirigido hacia afuera de ellas. Para que la suma de sus campos se anule, el punto P debe encontrarse situado entre ambas cargas.



Esto nos deja una situación de partida como la que se ve en el dibujo. Dado que los módulos de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ han de ser iguales podemos escribir:

$$K\frac{q_1}{r_1^2} = K\frac{q_2}{r_2^2}$$

Simplificando y sustituyendo los valores de las cargas nos queda:

$$r_2 = 2r_1$$

Por otro lado, a la vista del dibujo, tenemos:

$$r_2 + r_1 = 15cm$$

De éstas dos relaciones obtenemos la posición del punto P:

$$r_1 = 5 \text{ cm}$$

Es decir, a 5 cm a la derecha de q_1, en x=5cm.

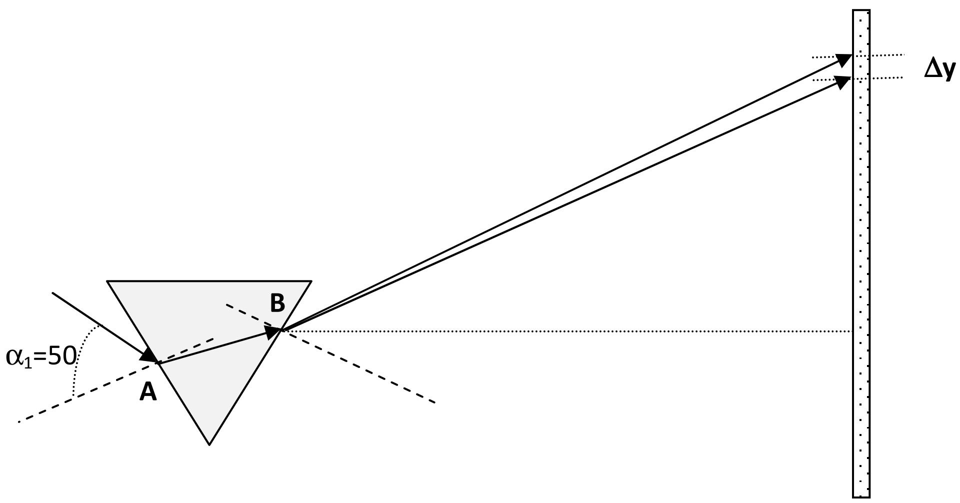
Para calcular el potencial basta tener en cuenta que $V = V_1 + V_2$ siendo V_1 y V_2 los potenciales electrostáticos creados por q_1 y q_2 respectivamente (supondremos que el potencial electrostático en el infinito es cero). Es decir:

$$V = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2}$$

Sin más que sustituir los datos y las distancias del apartado anterior obtenemos el resultado deseado V=5400 V

(Fijarse que existe una solución trivial, colocar la carga en un punto infinitamente alejado, donde tanto el campo eléctrico como el potencial se anulan).

8. Un prisma equilátero de vidrio de alta dispersión (vidrio Flint), tiene un índice de refracción de 1.723 para una longitud de onda de 532nm (verde) y 1.710 para una longitud de onda de 635nm (rojo). Si dos rayos de luz procedentes de láseres de estas dos longitudes de onda inciden en un punto de una de sus caras con un ángulo de 50^o respecto a la normal a esa cara ¿Cuál será la distancia Δy entre sus proyecciones en una pantalla situada a 1.5m del prisma? (Suponer que los dos rayos inciden en el punto A y abandonan el prisma en el mismo punto B, debido a las reducidas dimensiones de éste)



Solución

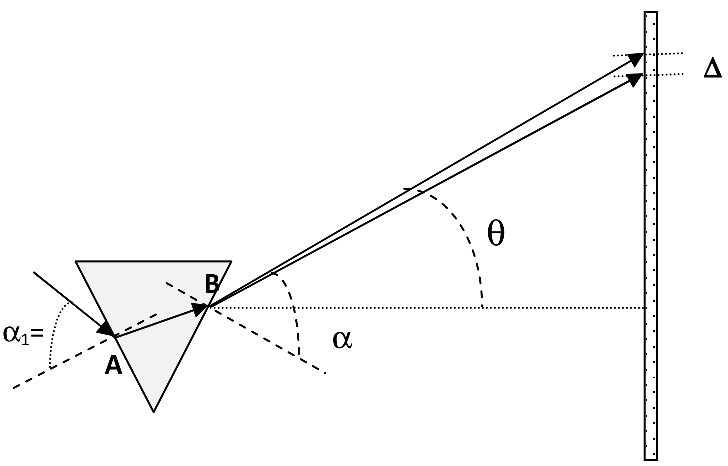
Refracción en la primera superficie

Verde 1 sen50 = 1.723 sen α_{2v} α_{2v}=26.4°

Rojo 1 sen50 = 1.710 sen α_{2r} α_{2r}=26.6°

Cálculo de ángulos para la refracción en la segunda cara

α_3=60- α_2 α_{3v}=33.6° α_{3r}=33.4°



Refracción en la segunda superficie

Verde 1.723 sen33.6 = 1 sen α_{4v} α_{4v}=72.46°

Rojo 1.710 sen33.4 = 1 sen α_{4r} α_{4r}=70.27°

Cálculo de ángulos de salida respecto al eje horizontal

θ= α_4-30 θ_v=42.46° θ_r=40.27°

Cálculo de la altura y donde impacta el rayo laser tgθ=y/d (d=1.5m)

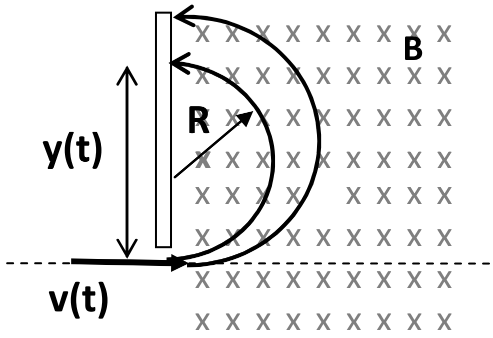
y_v= 137.3 cm

y_r= 127.1 cm

Δy= 10.2 cm

9. El espectrómetro de masas es un dispositivo que se utiliza para determinar la relación carga masa de iones de un determinado compuesto, midiendo el radio de sus órbitas circulares en un campo magnético. Los iones de carga **q** y masa **m**, tras pasar por un selector de velocidades, salen con una velocidad **v** y se introducen en una zona donde existe un campo magnético **B** perpendicular a dicha velocidad. Al entrar en esta zona sufren una fuerza magnética que les hace describir una trayectoria circular de radio **R**, e impactar en un detector a una determinada distancia **y** del punto de entrada. Este dispositivo permite por ejemplo, conocer la composición isotópica de un material, ya que todos los iones de este material tendrán la misma carga pero distinta masa y eso hará que describan una trayectoria circular con un radio proporcional a dicha masa.

En el espectrómetro de la figura, la velocidad con la que iones idénticos de una determinada sustancia entran dentro de la zona de curvatura, se reduce cada segundo a la mitad debido a un fallo eléctrico en el selector de velocidades.



a) Partiendo de una velocidad inicial v_0 calcular la velocidad con la que entran los iones pasados 1, 2, 3 y 4s y hallar una expresión general que describa la variación de la velocidad con el tiempo, v(t).
b) Demostrar que el radio de la trayectoria de los iones dentro de la zona de curvatura en un instante t será R(t)=mv(t)/qB
c) Al disminuir el radio disminuye la distancia **y** de impacto ¿Cuál será la velocidad a la que disminuye esta distancia de impacto **y**(t)?

<u>Solución</u>

a) $v(1) = {}^{v_0}/_{2}$, $v(2) = {}^{v_0}/_{4}$, $v(3) = {}^{v_0}/_{8}$, $v(4) = {}^{v_0}/_{16}$, $v(t) = {}^{v_0}/_{2^t}$

b) $q\left|\vec{v} \times \vec{B}\right| = m(v^2/R) \;\Rightarrow\; R(t) = m\,v(t)/qB$

c) $y(t) = 2R(t) \quad dy(t)/dt = d(2mv(t)/qB)/dt = -\,(2mv_0 Ln2)/(qB2^t)$