UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

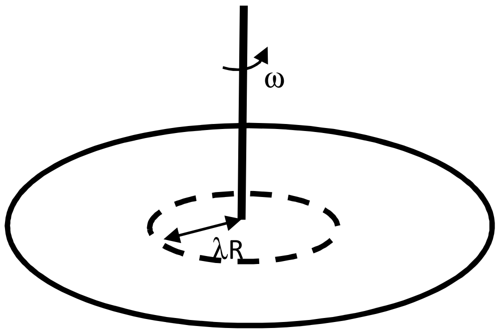
OLIMPIADA DE FÍSICA

FASE LOCAL

9 de Marzo de 2018

1

Un disco de radio R gira con una velocidad angular ω constante alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro. A una distancia λR ($0 \leq \lambda \leq 1$) del eje hay un saltamontes que quiere escapar del disco. Salta con una velocidad v_o relativa al disco perpendicular y hacia arriba. Hallar el valor de λ que permite que el saltamontes salga del disco (que caiga sobre el extremo del disco)



Solución:

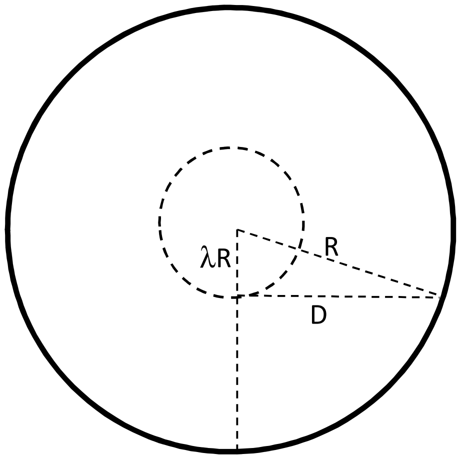
En el eje vertical se cumple:

$Y = v_{oy}t - gt^2/2$

En el horizontal

$X = v_x\, t$

Donde v_x es la velocidad tangencial del disco, $\omega\, \lambda R$.



Si ahora queremos que llegue al extremo se cumplirá que cuando Y = 0 , x = D donde $D = R\,(1-\lambda^2)^{1/2}$

Imponiendo estas dos condiciones se obtiene:

$$\lambda^2 = \frac{1}{1+4\left(\frac{\omega v_{oy}}{g}\right)^2}$$

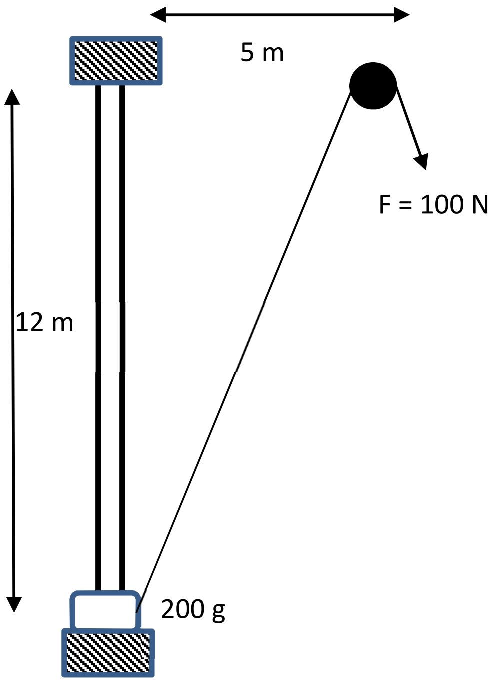
2

Queremos levantar 12 m un objeto de 200 g de masa, que desliza sobre una barra vertical, tirando de una cuerda con una fuerza constante de 100 N. La cuerda pasa a través una polea de masa y tamaño despreciable. Suponemos despreciable la fuerza de rozamiento entre el objeto y la barra vertical.

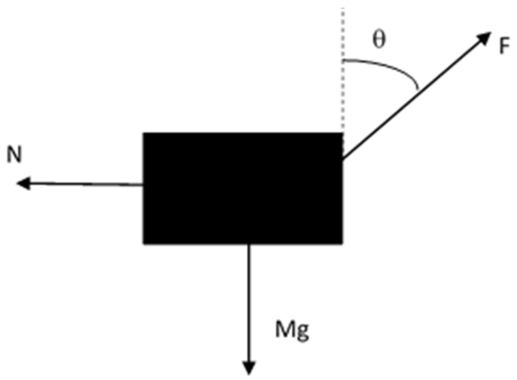
a. Hallar, en el instante inicial, el valor de todas las fuerzas que recibe el objeto y dibujarlas.
b. Hallar la aceleración del objeto en ese instante.

Si el objeto llega a la parte superior con una velocidad de 88 m/s,

c. Calcular el trabajo realizado por F.



Solución:

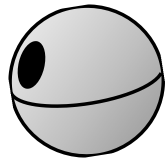


N = F sin θ = 43.8 N

F cos θ – Mg = Ma   a = 451.6 m/s^2

W = ΔEm = mv^2/2 + mgh → W = 798.4 $\approx$ 800 J

3



Mientras el Imperio intenta recuperar información de la princesa Leia, la Estrella de la Muerte se coloca en una órbita circular a una distancia R del centro del planeta Alderaan. Una vez conseguida la información (falsa, por cierto) el malvado general Tarkin decide destruir Alderaan, lanzando el terrible rayo de energía.

Aunque siempre se nos ha dicho que el planeta fue destruido completamente, algunos historiadores galácticos opinan que esto no es posible y que el rayo solo era capaz de destruir una parte del planeta en cada disparo.

Para analizar esta posibilidad hagamos la siguiente hipótesis

- Un disparo volatiliza una fracción de la masa del planeta, en forma de corteza esférica, que es convertida en energía pura, alejándose del sistema más allá de la órbita de la Estrella de la Muerte. El único efecto del disparo es la repentina reducción de la masa del planeta del valor original M a un valor menor $M' = fM$. El parámetro f (≤ 1) mide la fracción de la masa del planeta que queda tras el disparo. La velocidad en la órbita en el instante del disparo no cambia
- La masa de la Estrella de la Muerte es despreciable comparada con la masa del planeta.

Teniendo en cuenta esto:

a. Demostrar que si el rayo destruye más de la mitad del planeta ($f \leq 1/2$), la Estrella de la Muerte dejará de estar en órbita alrededor de Alderaan, es decir escapará de la atracción de Alderaan
b. Para una destrucción menor, digamos $f = 0.75$, la órbita de la Estrella de la Muerte alrededor de los restos del planeta pasará a ser elíptica. Determinar, para esta nueva órbita, la distancia a la que se encuentra el apoastro (máxima distancia de la Estrella de la Muerte al centro del planeta, o mejor dicho de sus restos)

Solución:

La energía E de un cuerpo (Estrella de la Muerte=EM) de masa m en órbita alrededor de un planeta de masa M es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} \qquad (1)$$

Siendo v la velocidad del cuerpo y R la distancia del cuerpo al centro del planeta.

Por otro lado, en una órbita circular, la fuerza gravitatoria proporciona la necesaria aceleración centrípeta $a = v^2/R$. De acuerdo con la Segunda ley de Newton

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$$

Y por tanto la velocidad en la órbita circular vendrá dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad (2)$$

a) Cuando la EM dispara su rayo y destruye parte del planeta, la velocidad instantánea dada por (2) no cambia, pero la energía potencial gravitatoria se reduce, ya que la masa pasa de M a $M' = fM$. La nueva energía E' vendrá dada por la ecuación (1) cambiando M pro M' pero con la velocidad dada por (2).

$$E' = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M'm}{R} \qquad (3)$$

Al ser $M' < M$ la energía E' dada por (3) es mayor que E. Para que la órbita sea cerrada (circular, elíptica) E' tiene que ser negativa. El caso límite que nos interesa se corresponde por tanto con $E' = 0$ (órbita parabólica, abierta). Usando $M' = fM$, la velocidad v dada por (2) y haciendo $E' = 0$ en (3) se obtiene el valor de f necesario para que la EM deje de orbitar alrededor de los restos del planeta.

$$E' = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M'm}{R} = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{R}\right) - G\frac{fMm}{R} = 0$$

$$f = \frac{1}{2}$$

Para cualquier valor de $f < \frac{1}{2}, E'$ será positiva y la órbita hiperbólica (y abierta).

b) Para un valor $f = 0.75$ la EM seguirá en órbita, pero ya no será circular (figura). El lugar del disparo se convertirá en el periastro de la nueva órbita ($r_p = R$) y su velocidad en dicho lugar (v_p) será la velocidad que llevaba en ese momento, dada por (2) $v_p = v = \sqrt{GM/R}$. Ahora la órbita es alrededor de un cuerpo de masa M'

La conservación del momento angular implica que

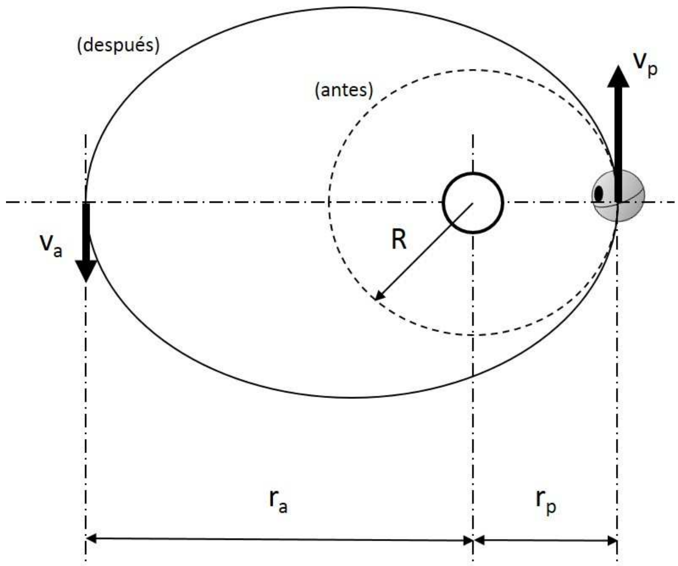
$$mr_pv_p = mr_av_a$$

Y por tanto

$$v_a = \frac{r_p}{r_a}v_p \quad (4)$$

La energía será la misma en el periastro y en el apoastro, por tanto

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{M'm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - G\frac{M'm}{r_a} \qquad (5)$$



Sustituyendo (4) en (5)

$$\frac{1}{2}v_p^2 - G\frac{M'}{r_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_p}{r_a}v_p\right)^2 - G\frac{M'}{r_a}$$

$$\frac{1}{2}v_p^2\left[1-\left(\frac{r_p}{r_a}\right)^2\right] = GM'\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_a}\right)$$

Usando $v_p = v = \sqrt{GM/R}$, $r_p = R$ y escribiendo $M' = fM$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{GM}{R}\right)\left[1-\left(\frac{R}{r_a}\right)^2\right] = GfM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_a}\right)$$

$$\left[1-\left(\frac{R}{r_a}\right)^2\right] = 2f\left(1-\frac{R}{r_a}\right)$$

$$\left(1-\frac{R}{r_a}\right)\left(1+\frac{R}{r_a}\right) = 2f\left(1-\frac{R}{r_a}\right)$$

$$\left(1+\frac{R}{r_a}\right) = 2f$$

Obtenemos finalmente el resultado

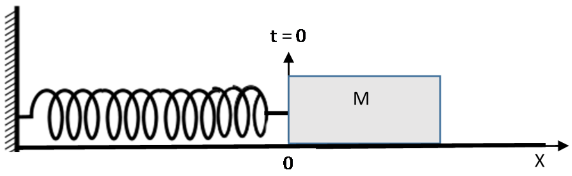
$$r_a = \frac{R}{2f-1}$$

Que como hemos visto en el primer apartado, solo tiene sentido para valores de $f \geq 1/2$ (órbita cerrada). En particular, para el valor $f = 0.75$

$$r_a = 2R$$

4

Un bloque de masa M = 0,5 kg situado sobre un plano horizontal sin fricción oscila ligado a un muelle de constante recuperadora k = 20 N/m con amplitud A = 25 cm. Tomamos el origen de tiempos, t = 0, cuando el bloque pasa por x = 0 moviéndose hacia la izquierda.



a) Escribir la ecuación del movimiento del bloque

En t = 0 se coloca sobre el bloque una pesa de masa m<<M y en reposo respecto de él. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la pesa es 0,6. Inicialmente la masa y el bloque se mueven juntos y a partir de una elongación se separan

b) ¿Cómo varía la fuerza de rozamiento hasta el instante en que se separa?
c) ¿Para qué valor de elongación la pesa empezará a deslizar sobre el bloque?

Solución:

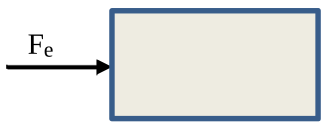
a) $x = Asen(\omega t + \varphi_o)$

$v = A\omega cos(\omega t + \varphi_o)$

$a = -A\omega^2 sen(\omega t + \varphi_o) = -\omega^2 x$

$A = 0{,}25m$

$\vec{F_e} = M\vec{a} \quad \rightarrow \quad kx = M\omega^2 x \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}5}} = 6{,}32\ \frac{rad}{s}$

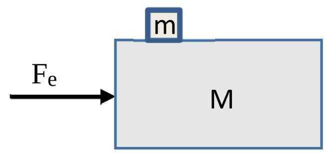


$t = 0\ y\ x = 0\ v < 0 \quad \begin{cases} x = Asen(\varphi_o) = 0 \\ v = A\omega cos(\varphi_o) < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi$

Ecuación del movimiento: $x = 0{,}25sen(6{,}32t + \pi)\ m$

b) Como m <<M la ecuación del movimiento es la misma mientras se mueven juntos

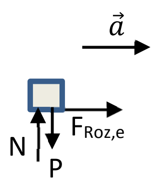
$F_{Roz,e} = ma = -m\omega^2 x = -m6{,}32^2 \cdot 0{,}25sen(6{,}32t + \pi)$



c) Se separan cuando la Fuerza de rozamiento alcanza el valor máximo

$F_{Roz,e,max} = \mu_e N = \mu_e mg = ma$

$a = -\omega^2 x = \mu_e g \ \Rightarrow \ x = -\frac{\mu_e g}{\omega^2} = \frac{0{,}6 \cdot 9{,}8}{6{,}32^2} = -0{,}15m$



5

Los terremotos producen ondas sísmicas de diferentes tipos. Uno de ellos son las ondas superficiales, que pueden aproximarse a ondas sinusoidales transversales, que se propagan paralelas a la superficie.

Supongamos una onda sísmica superficial de frecuencia 0.5 Hz, un valor razonable para un seísmo real, que se propaga sin amortiguación.

Calcular la amplitud que debe tener la onda sísmica (en metros) para que una persona llegue a perder el contacto con el suelo a su paso.

Solución:

Para que un cuerpo se llegue a separar del suelo la aceleración del suelo deberá ser mayor o igual que la de la gravedad (g).

Una onda sinusoidal transversal viene dada (por ejemplo) por la ecuación:

$$y(x,t) = Acos(kx - \omega t)$$

Para un punto x fijo, la velocidad y aceleración verticales serán:

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega Asen(kx - \omega t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 Acos(kx - \omega t)$$

El valor máximo de la aceleración se obtiene cuando $cos(kx - \omega t) = 1$. En valor absoluto es

$$a_{max} = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A$$

Para que un cuerpo se separe del suelo, $a_{max} \geq g$ con $g = 9.81\ m/s^2$

$$a_{max} \geq g$$

$$(2\pi f)^2 A \geq g$$

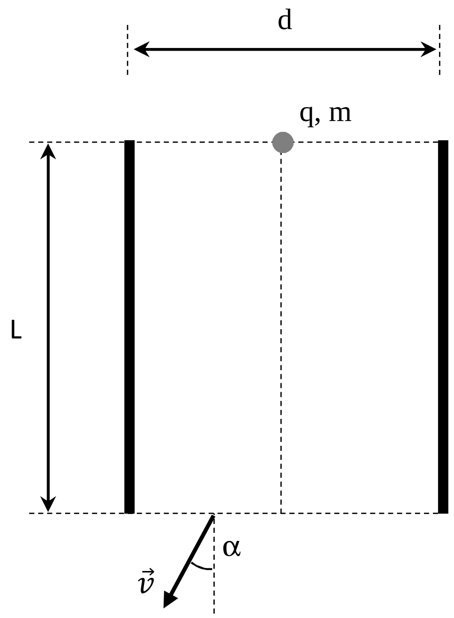
$$A \geq \frac{g}{(2\pi f)^2} = \frac{9.81}{(2\pi \cdot 0.5)^2} = 0.99\ m$$

6

Se tienen dos placas plano-paralelas metálicas cuadradas, de lado L, y puestas verticalmente una frente a la otra y separadas una distancia d=10 cm. (vistas de perfil en la figura). Sobre las placas se aplica una diferencia de potencial desconocida ΔV
Desde un punto situado justo en medio de las placas, a la altura del borde superior de las mismas, se deja caer sin velocidad inicial una pequeña bolita de masa m=1g y carga eléctrica q=1μC. Cuando la bolita asome por la parte inferior de las placas la velocidad de la bolita formará cierto ángulo con la vertical α.

a) ¿Cuál es el valor de ΔV necesario para que dicho ángulo sea α=30º?
b) ¿Cuál es la máxima altura L de las placas que permite a la bolita salir por abajo antes de chocar con ellas?
c) Para ese valor máximo de L ¿Cuál será la carga eléctrica de la placa de la izquierda?

(permitividad del vacío, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$)



Solución:

a) En el eje vertical (y) la aceleración es $a_y = g$. En el eje horizontal (X) la aceleración a_x viene dada por la fuerza eléctrica F_e debida a las placas.

$$a_x = \frac{F_e}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{q\Delta V}{md}$$

Si llamamos t al tiempo que tarda la partícula en llegar a la altura del borde inferior de las placas entonces

$$v_x = a_x t, \qquad v_y = a_y t,$$

El α ángulo viene dado por

$$tg(\alpha) = \frac{v_x}{v_y} = \frac{a_x t}{a_y t} = \frac{a_x}{a_y} = \frac{q\Delta \mathrm{V}}{gmd} \qquad (1)$$

De donde obtenemos

$$\Delta \mathrm{V} = \frac{gmd \cdot tg(\alpha)}{q} = \frac{9.81 \cdot 0.001 \cdot 0.1 \cdot tg(30)}{10^{-6}} = 566\, V$$

b) El valor máximo de L está condicionado por el hecho de que la partícula tiene que salir sin chocar con las placas. El desplazamiento horizontal máximo es $d/2$. El desplazamiento vertical es L. Como las aceleraciones son constantes

$$\frac{\mathrm{d}}{2} = \frac{1}{2} a_x t^2, \qquad \mathrm{L} = \frac{1}{2} a_y t^2,$$

Dividiendo ambas ecuaciones y teniendo en cuenta (1)

$$\frac{d/2}{L} = \frac{a_x}{a_y} = tg(\alpha)$$

Por lo tanto, el valor máximo de L es

$$L = \frac{d}{2tg(\alpha)} = 0.087\, m = 8.7\, cm$$

c) Como las placas son cuadradas su superficie es L^2 Si σ es la densidad de carga, el campo en el interior de un condensador de placas plano paralelas es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\Delta \mathrm{V}}{d}$$

Por lo tanto, el valor (absoluto) de la carga Q de una placa es

$$\mathrm{Q} = \sigma \mathrm{L}^2 = \epsilon_0 \frac{\Delta \mathrm{V}}{d} \mathrm{L}^2 = 3.8 \cdot 10^{-10}\, C$$

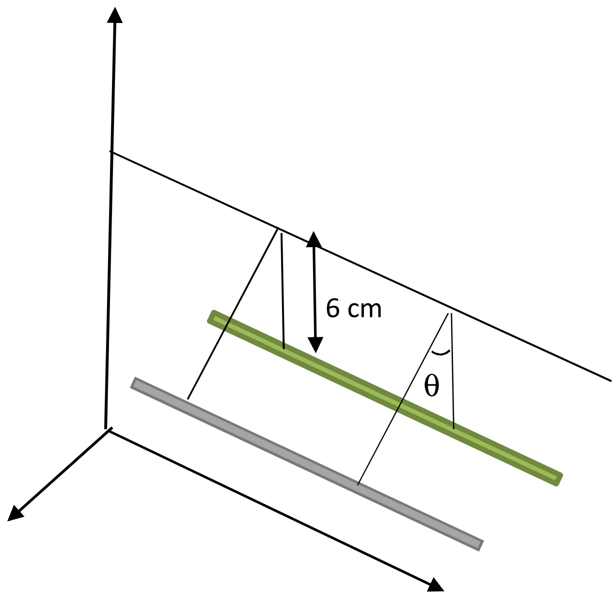
En este caso la placa de la izquierda está cargada negativamente y la solución es

$$\mathrm{Q} = -3.8 \cdot 10^{-10}\, C$$

7

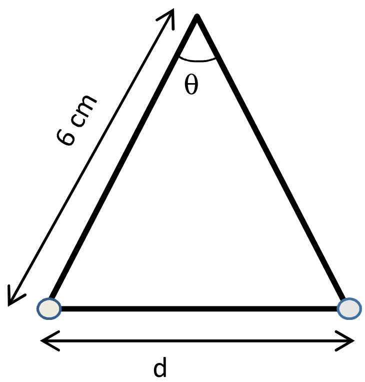
Una línea de transmisión está formada por dos alambres paralelos largos que tienen una masa por unidad de longitud de 50 g/m cada uno. Sujetamos los alambres con cuerdas iguales de 6 cm de largo como indica la figura. Hacemos circular por los dos alambres la misma corriente I y se observa que los dos alambres se repelen formando las cuerdas entre sí un ángulo de θ = 14º

a) Las corrientes, ¿tienen direcciones iguales u opuestas? Razonar la repuesta.
b) ¿Cuál es el valor de la corriente?

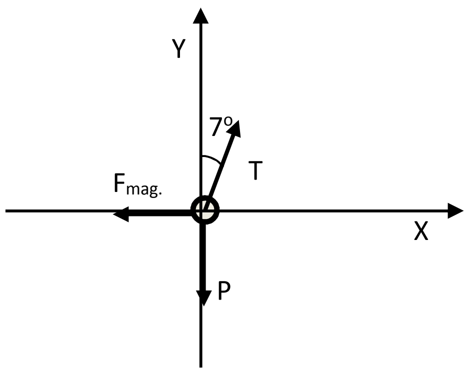


Solución:

a) Repulsión. Corrientes en direcciones opuestas



b) Equilibio: $\sum \vec{F} = 0$



X: $F_{mag} = T\mathrm{sen}(\theta/2)$
Y: $P = T\cos(\theta/2)$

$$d = 2 \cdot 0{,}06 \cdot sen\frac{\theta}{2}$$

$$F_{mag} = mg\ tg\frac{\theta}{2} = \mu_o \frac{I^2 L}{2\pi d} =$$

$$I^2 = \frac{2\pi d g tg\frac{\theta}{2}}{\mu_o}\frac{m}{L} = \frac{4\pi \cdot 0{,}06 \cdot sen7 \cdot 9{,}8 \cdot tg7}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 0{,}05$$

$$I = 66{,}3A$$

8

Una hormiga se mueve sobre una pared describiendo una pequeña circunferencia, en el sentido de las agujas del reloj, a una velocidad de 2 mm/s. Mediante una lente de focal 10 cm proyectamos este movimiento sobre una pantalla. Sabemos que la pared, la pantalla y la lente son paralelos entre sí y el eje simetría de la lente pasa por el centro de la circunferencia descrita por la hormiga. La lente se encuentra a 30 cm de la pared.

a) ¿A qué distancia habrá que colocar la pantalla para que la imagen producida por la lente esté enfocada?

b) ¿Cuál es la velocidad, en mm/s, de la imagen de la hormiga en la pantalla?

c) ¿En que sentido (sentido de las agujas del reloj o sentido contrario al de las agujas del reloj) recorrerá la imagen de de la hormiga su camino?

Solución:

a) Para encontrar la posición de la pantalla usamos la ecuación de la lente

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{S} + \frac{1}{S'}$$

En este caso $f' = 10\ cm$, $S = 30\ cm$ y por tanto la distancia a la imagen enfocada (a la pantalla) S' es

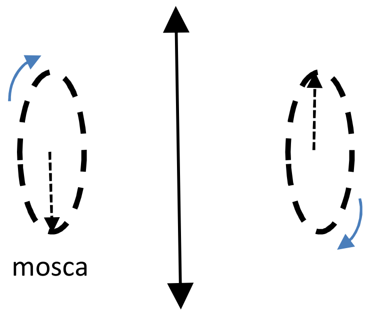
$$S' = 15\ cm$$

b) El aumento lateral m de este sistema

$$m = \frac{-S'}{S} = \frac{-15}{30} = -0.5$$

En la imagen todos los tamaños se han reducido a la mitad. Por tanto también las velocidades lineales se reducen a la mitad (la longitud de la circunferencia imagen es la mitad, pero la imagen de la hormiga la recorre en el mismo tiempo que la hormiga recorre la circunferencia real). Su módulo es

$$v_{imagen} = \mathrm{m} \cdot v_{real} = 0.5 \cdot 2\frac{mm}{s} = 1\ mm/s$$



c) En cuanto al sentido de giro, el aumento lateral es negativo, la imagen está invertida. Eso significa que será recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj.