UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

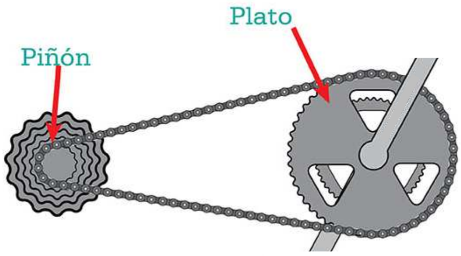
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

OLIMPIADA DE FÍSICA

FASE LOCAL

1

Una bicicleta tiene un plato de 20 cm de diámetro y un piñón de 8 cm de diámetro. El ciclista pedalea de modo que la velocidad angular del plato va aumentando con una aceleración angular constante de 0.4 π rad/s^2. El plato transmite el movimiento al piñón mediante la cadena. Partiendo del reposo, hallar el tiempo necesario para que la velocidad del piñón sea de 300 rpm.



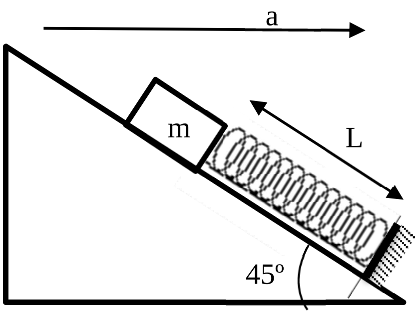
Solución:

a_t (piñon) = a_t (plato) $\rightarrow$ $\alpha_1 R_1 = \alpha_2 R_2$ $\rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 R_2/R_1 = \pi$ rad/s^2

$\omega_f = \omega_o + \alpha_1 t \rightarrow \omega_f = \alpha_1 t \rightarrow t = 10$ s

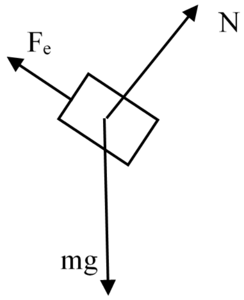
2

El plano inclinado liso de la figura se mueve con una aceleración a = 3.3 m/s^2. En estas condiciones la masa m = 10 kg permanece estacionaria sobre el plano unida a un muelle de constante elástica K=200 N/m. Si la longitud del muelle es $L = 2l_0/3$ donde l_0 es la longitud natural del muelle, hallar el valor de l_0.



Solución:

Como el muelle está encogido:



$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{N} \cos 45 + \text{Fe} \sin 45 = \text{m g} \\ \text{N sen } 45 - \text{Fe} \cos 45 = \text{m a} \end{cases}$$

$$Fe = |K\,\Delta l| = K\frac{l_0}{3}$$

$$l_0 = 0.69\,m$$

3

Una partícula se mueve con una fuerza $\vec{F} = K\,\vec{u} \times \vec{v}$ donde K es una constante, $\vec{v}$ representa la velocidad y $\vec{u}$ es un vector unitario cualquiera. ¿Cuál es el trabajo que realiza la fuerza en un tiempo t? ¿Cuál es la variación de la energía cinética de la partícula en ese mismo intervalo de tiempo?

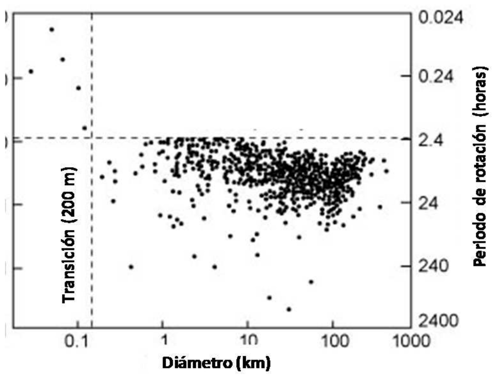
Solución:

0 y 0

4

Esta es una imagen del asteroide 253 Mathilde fotografiado por la sonda *NEAR Shoemaker* en junio de 1997. Tiene unos 50 km de diámetro y como todos los asteroides, gira sobre sí mismo. En el caso de Mathilde el periodo de rotación es muy lento, tardando unos 17.4 días en completar una revolución sobre su propio eje.

Existen muchos asteroides, con diferentes tamaños y velocidades de rotación. En la gráfica se representa, para un conjunto de asteroides, los valores de su periodo de rotación (en horas) frente a su diámetro (en km). De esta gráfica se deduce que no existen asteroides grandes que giren muy rápido. Más concretamente todos los asteroides con un diámetro mayor de 200 m giran sobre sí mismos con periodos mayores que 2.4 horas.



La explicación es la siguiente. Los asteroides, a partir de un cierto tamaño, pueden considerarse como un conglomerado de rocas y polvo unido exclusivamente por su propia gravedad. En otras palabras, "un gran montón de rocas". Si el asteroide gira demasiado rápido, la gravedad no es suficiente para mantenerlo cohesionado.

Dicho todo esto, se pide

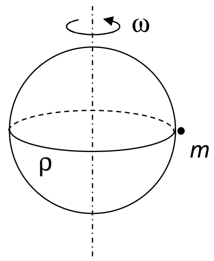
a. Demostrar que existe una velocidad de rotación máxima ω_{max} para que una partícula se mantenga sobre la superficie del asteroide y no se separe de ella y que dicha velocidad solamente depende de la densidad ρ del asteroide y de constantes universales. (Ayuda: suponer un asteroide esférico y analizar la situación de una pequeña piedra en su ecuador)

b. Razonar porqué el resultado anterior implica un límite al giro de todo el asteroide.

c. De la figura está claro que el periodo de rotación mínimo para un asteroide es 2.4 horas. A partir de ese valor estimar la densidad ρ de un asteroide.

Constante de gravitación universal $G = 6.67\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

Solución:



a) Sobre la masa m actúa la atracción gravitatoria del asteroide, dirigida radialmente hacia el centro del asteroide, y la fuerza normal en la superficie, dirigida radialmente hacia afuera. La suma de ambas fuerzas debe proporcionar la aceleración centrípeta correspondiente a la velocidad de rotación ω en la posición de la masa.

La situación crítica, con la masa a punto de separarse, tiene lugar cuando la fuerza normal se anula y la fuerza gravitatoria proporciona toda la aceleración centrípeta ($\omega_{max}^2 R$).

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\omega_{max}^2 R$$

Siendo R y M el radio y la masa del asteroide. Poniendo la masa del asteroide M en función de su densidad:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Y sustituyendo y simplificando obtenemos

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}$$

b) Esta expresión anterior no depende del radio del asteroide. Por tanto, si la velocidad de rotación es alta, se desmembrará ya que según va perdiendo masa su radio disminuye, pero la condición anterior se mantiene.

c) Despejando la densidad ρ y usando la relación entre ω y el periodo T

$$\rho = \frac{3}{4\pi G}\omega_{max}^2 = \frac{3}{4\pi G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{3}{4\pi\ 6.67\ 10^{-11}}\left(\frac{2\pi}{2.4\cdot 3600}\right)^2 = 1.9\ 10^3\ kg/m^3 = 1.9\ g/cm^3$$

5

Dos amigos asisten a un concierto y llevan un sonómetro para medir el nivel de intensidad sonora. Mediante este dispositivo, uno de los amigos mide un nivel β_1 = 105,0 dB, mientras que el otro, quien se encuentra sentado 4 filas (2,8 m) más cerca del escenario, mide β_2 = 108,0 dB.

a) ¿A qué distancia de los altavoces se encuentran los amigos?
b) ¿Cuál es la potencia del sonido emitido?

$I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

a)

$$\beta_1 = 10log\frac{I_1}{I_0} = 10log\left(\frac{I_1}{1\cdot 10^{-12}}\right) = 105,0\ dB \rightarrow\ \ I_1 = 0,0316\ \frac{W}{m^2}$$

$$\beta_2 = 10log\frac{I_2}{I_0} = 10log\left(\frac{I_2}{1\cdot 10^{-12}}\right) = 108\ dB$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 10log\frac{I_2}{I_0} - 10log\frac{I_1}{I_0} = 10log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

Como $\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$

$$\beta_2 - \beta_1 = 10log\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = 10\cdot 2\cdot \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 3,0\ dB$$

Obtenemos

$$\frac{r_1}{r_2} = 1,41$$

Y del enunciado $r_1 = r_2 + 2,8$

$$r_2 = 6,83m, \qquad r_1 = 9,63m$$

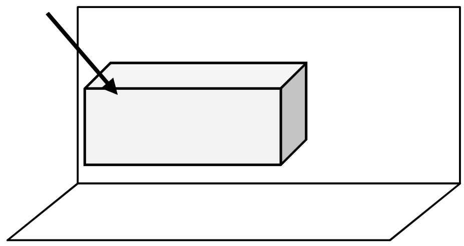
b)

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}\ \ \rightarrow\ \ P = 4\pi\cdot 9,63^2\cdot 0,0316 = 36,85\ W$$

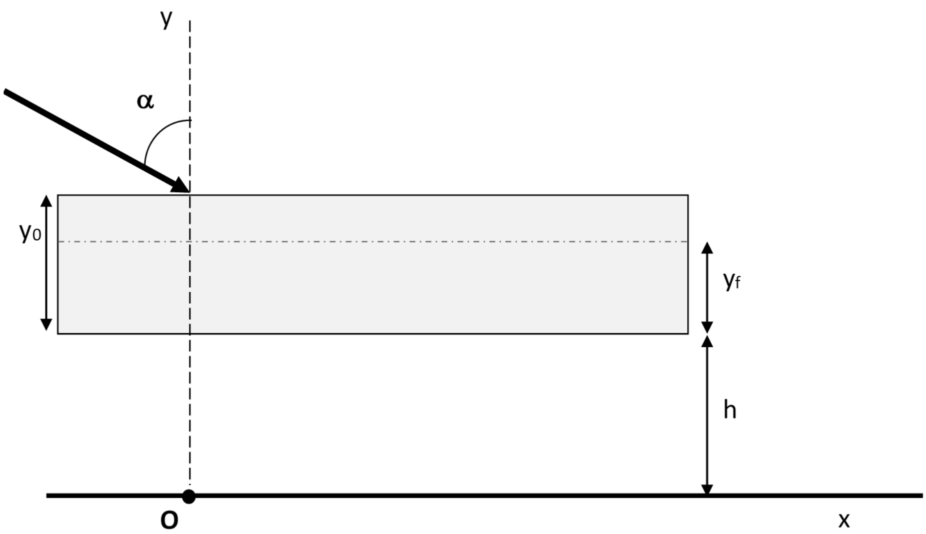
6

Un recipiente de dimensiones, 15 cm de largo por 4 cm de alto por 3 cm de profundidad, lleno de agua hasta el borde es atravesado por un rayo de luz que forma un ángulo α de 60º respecto a la normal a la superficie del agua. A una distancia h=5 cm por debajo del recipiente existe una pantalla donde incide el rayo una vez atravesado el recipiente. (Consideraremos que el espesor de las paredes del recipiente es despreciable y que la dirección del rayo se mantiene estable en el tiempo)

a) Dibujar el trazado de rayos
b) ¿A qué distancia x_0 del punto O incidirá el rayo en la pantalla cuando el recipiente está lleno hasta el borde ($y_0 = 4$ cm)?
c) Si al cabo de un cierto tiempo esa distancia x_0 ha aumentado 2 cm ¿Cuántos cm^3 de agua se han evaporado? (Ayuda: el nivel de agua baja hasta un nivel y_f pero el rayo incidente no cambia de dirección)

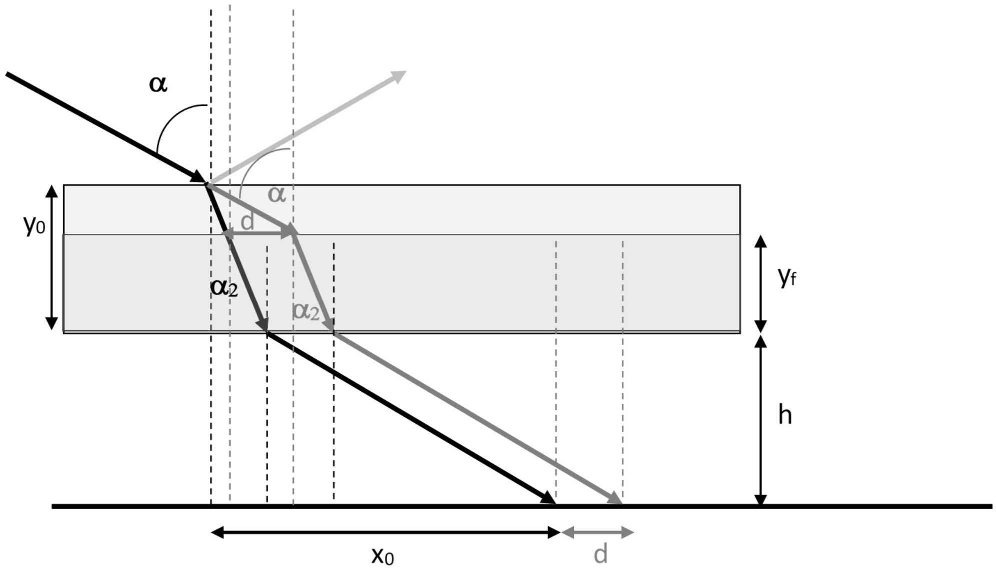


(Índice de refracción del aire 1, índice de refracción del agua 1.33)



Solución:

a)



b) Aplicando la ley de la refracción:

$$n\text{sen}\alpha = n_2\text{sen}\alpha_2$$

$$1 \text{ sen}60 = 1.33 \text{ sen}\alpha_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = 40.63^o$$

$$x_0 = y_0\text{tg}\alpha_2 + h\text{tg}\alpha = \ 3.43 + 8.66 = 12.09 \ cm$$

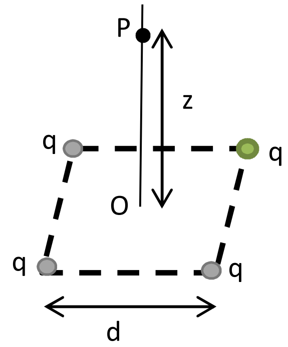
c) Cuando ha bajado hasta un nivel y_f la distancia d (2 cm) que se ha desplazado el rayo en la pantalla es igual a la distancia d indicada en el dibujo por lo tanto:

$$d = (y_0 - y_f)\text{tg}\alpha - (y_0 - y_f)\text{tg}\alpha_2 \quad \Longrightarrow \quad (y_0 - y_f) = 2.288 \ cm$$

Multiplicando este valor por las dimensiones de longitud y profundidad del recipiente:

$$V(evaporado) = 2.288 \cdot 15 \cdot 3 = 102.96 \ cm^3$$

7



Cuatro cargas puntuales idénticas cada una con carga +q están fijas en las esquinas de un cuadrado de lado d.

a) Calcular el campo eléctrico en un punto P, situado a una distancia z del cuadrado, en la línea perpendicular al plano del cuadrado y que pasa por su centro, O.

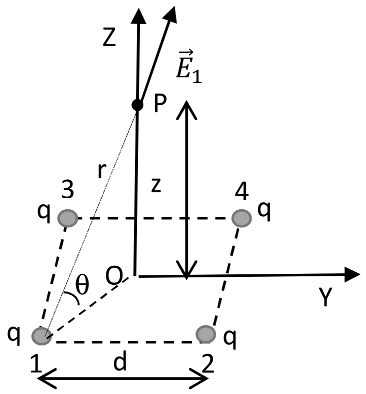
Colocamos una partícula puntual de masa m y carga –Q en el punto P

b) ¿Cuál es la fuerza que experimenta dicha partícula?

Si z << d, y la velocidad inicial de la partícula es nula

c) Describir el tipo de movimiento que realiza la partícula.
d) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al punto O?

Solución:



a) Por principio de superposición, el campo eléctrico en P es el creado por las cuatro cargas

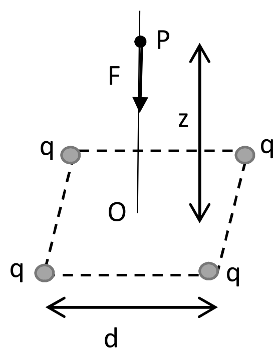
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

Por simetría en la distribución de cargas, el campo solo tiene componente en el eje z.

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = k\frac{q}{r^2}$$

$$r^2 = z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = z^2 + \frac{d^2}{2}$$

$$\vec{E} = 4|\vec{E}_1|sen\theta\vec{k} = 4k\frac{q}{r^2}\frac{z}{r}\vec{k} = 4k\frac{qz}{\left[z^2 + \frac{d^2}{2}\right]^{3/2}}\vec{k}$$



b) La fuerza que experimenta la partícula está dirigida hacia el centro del cuadrado

$$\vec{\mathrm{F}} = -4\mathrm{k}\frac{\mathrm{Qqz}}{\left[\mathrm{z}^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{2}\right]^{3/2}}\vec{\mathrm{k}}$$

c) Si el punto P es muy próximo al centro del cuadrado, z << d y $z^2 + \frac{d^2}{2} \sim \frac{d^2}{2}$. La fuerza es

$$\vec{F} = -4k\frac{Qqz}{\left[\frac{d^2}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{k} = m\vec{a}$$

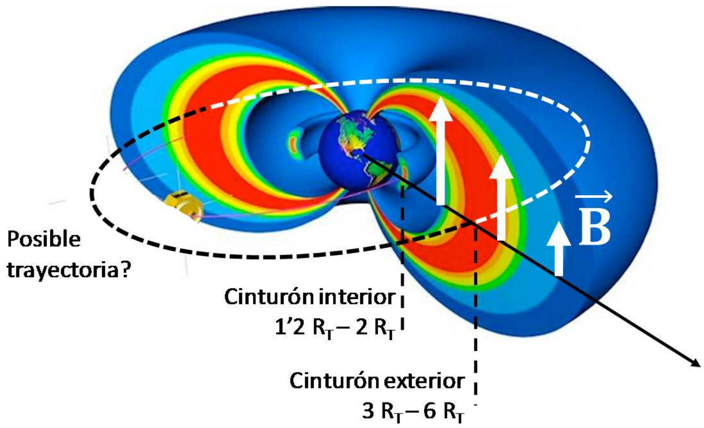
Y la aceleración $\vec{a} = -4\frac{kQqz}{m\left[\frac{d^2}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{k} = -\omega^2 z$

La partícula realiza un M.A.S con $\omega = \left(4 \frac{kQq}{m\left[\frac{d^2}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}\right)^{1/2}$

d) El periodo del M.A.S. es $T = 2\pi/\omega$ y la partícula llegará al centro del cuadrado cada vez que transcurra un tiempo t = (2n+1)T/4, n= 0,1,2….

8

El campo magnético terrestre interacciona con las partículas cargadas del viento solar, actuando como una barrera protectora natural que les impide, en gran medida, llegar a la superficie. Parte de estas partículas son desviadas de su camino, otras son atrapadas por el campo magnético formando lo que se conoce como cinturones de Van Allen.



Hay dos cinturones principales, con forma aproximadamente toroidal. Tomando como origen el centro de la Tierra el cinturón interior se extiende desde 1.2 a 2 veces el radio terrestre (R_T). El cinturón exterior se extiende desde 3 R_T a 6 R_T.

En el plano ecuatorial magnético el valor del campo magnético $\vec{B}$ es perpendicular a dicho plano, como se indica en la figura. Al ser un campo dipolar, la intensidad del campo disminuye con el cubo de la distancia al centro de la Tierra. Sabemos además que en la superficie terrestre el valor de B es aproximadamente

$$B(R = R_T) = 3\ 10^{-5}\ T$$

¿Puede un protón atrapado en el cinturón exterior, a una distancia $R = 5R_T$ del centro de la Tierra, moverse en una trayectoria circular como la mostrada en la figura? Suponer que el protón tiene una energía cinética de 100 keV. Con esta energía no es necesario considerar los efectos relativistas y podemos utilizar la física clásica.

El electronvoltio (eV) es la unidad de energía habitual cuando hablamos de partículas (keV, MeV, etc. son múltiplos). La equivalencia en julios es

$$1\ eV \approx 1.6\ 10^{-19}\ J$$

Otros datos: masa del protón: $1.7\ 10^{-27}\ kg$, Carga del protón: $1.6\ 10^{-19}\ C$

Solución:

Para determinar si el tipo de trayectoria que se nos sugiere es posible podemos calcular el valor del radio de la trayectoria real para la energía dada y para el valor del campo magnético en $R = 5R_T$ y compararlo con el radio de la trayectoria sugerida ($5R_T$).

El movimiento de una partícula de carga q, masa m y velocidad $\vec{v}$ que es perpendicular a un campo magnético $\vec{B}$ constante es un movimiento circular donde la aceleración centrípeta es proporcionada por la fuerza magnética $\vec{F}_m$ (fuerza de Lorentz) cuyo módulo es

$$\left|\vec{F}_m\right| = qvB$$

Siendo la aceleración centrípeta

$$a = \frac{v^2}{d}$$

Con d el radio de la circunferencia descrita por la carga. Usando la Segunda Ley de Newton obtenemos

$$qvB = m\frac{v^2}{d} \quad \rightarrow \quad d = \frac{mv}{qB}$$

Para obtener un valor numérico debemos saber el valor de la intensidad del campo magnético B a una distancia $R = 5R_T$ del centro de la Tierra. Como el campo dipolar decrece (en el plano ecuatorial) con el cubo de la distancia, basta dividir el valor en $R = R_T$ por 5^3, es decir:

$$B(R = 5R_T) = \frac{B(R = R_T)}{5^3} = \frac{3\ 10^{-5}\ T}{125} = 2.4\ 10^{-7}\ T$$

La velocidad v se obtiene a partir de la energía cinética.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

De donde despejamos v. Para obtener su valor tenemos en cuenta la conversión de eV a J.

$$E_c = 100\ keV = 100 \cdot 1000 \cdot 1.6\ 10^{-19} = 1.6\ 10^{-14}\ J$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1'6\ 10^{-14}}{1'7\ 10^{-27}}} = 4.3\ 10^6\ m/s$$

Por tanto el radio de la órbita circular d será:

$$d = \frac{mv}{qB} = \frac{1.7\ 10^{-27} \cdot 4.3\ 10^6}{1.6\ 10^{-19} \cdot 2.4\ 10^{-7}} = 1.9\ 10^5\ m = 190\ km$$

Que es muchísimo menor que $5R_T \sim 5 \cdot 6371\ km \sim 3.2\ \ 10^4\ km$. Por tanto el protón de 100 keV no puede describir la trayectoria sugerida alrededor de la Tierra.