1

Un tren circula a velocidad constante de 10m/s sobre una vía horizontal. Una persona lanza una pelota al aire formando un ángulo de 30º con la horizontal. En el exterior hay un observador en reposo, el cual ve que la pelota sale vertical. ¿Qué altura alcanzará la pelota?

Solución:

Para que el observador no vea velocidad horizontal, el lanzamiento ha debido ser en sentido contrario a la velocidad del tren y con la misma velocidad horizontal. Con lo cual:

$Vx = V \cos 30 = 10$

$Vy = V \sin 30 = 10 \text{ tg } 30$

$H = \frac{v_y^2}{2\,g} = 1.7 \text{ m}$

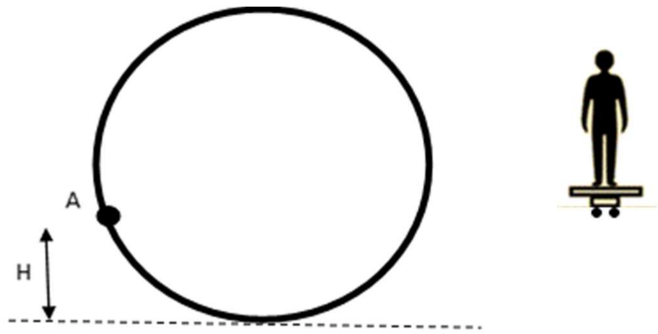
2

Un skater de masa M, se construye una monopatín con una báscula incorporada. Se lanza desde el punto A, situado a una altura H, a una pista circular e intenta hacer un looping.

a. Hallar la velocidad mínima que debe llevar en la parte inferior de la pista para que pueda describir el looping.

En esta caso

b. ¿Cuánto marcará la báscula que incorpora el patín en el punto más bajo?
c. ¿Qué velocidad deberá llevar en el instante inicial?



H = 1m

Radio pista = 2m

M= 60 kg

Solución:

En la parte más alta de la pista, N=0 con lo cual $v^2 = Rg$. Ahora aplicando la conservación de energía entre el punto más bajo y el más alto, la velocidad en el punto más bajo será $v^2 = 5Rg$ $\Rightarrow$ v = 9.9 m/s

La báscula marcará: N- mg = m$\frac{v^2}{R}$ $\Rightarrow$ N = 6 mg = 3528 N

Desde el punto de lanzamiento, aplicando conservación energía v = 8.8 m/s

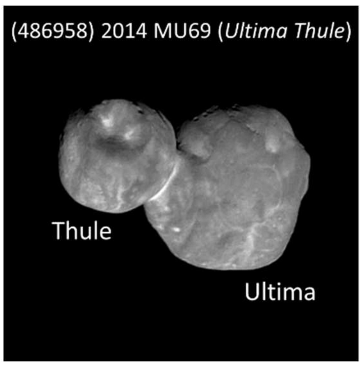
3

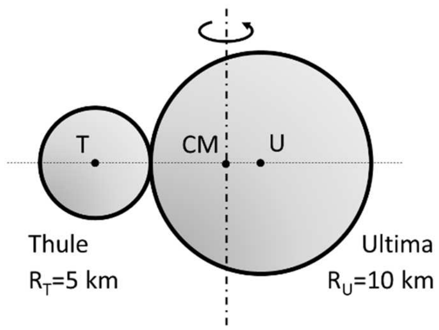
Primer día de enero de este año, la sonda New Horizons sobrevuela el objeto del cinturón de Kuiper (486958) 2014 MU_{69}, más conocido como Ultima Thule. Las primeras imágenes nos muestran claramente que se trata de un objeto formado por dos cuerpos prácticamente esféricos y hechos del mismo tipo de material. La NASA ha denominado Ultima al mayor y Thule al menor. Aproximadamente el radio de Ultima es R_U=10 km y el radio de Thule es R_T=5 km. Aunque no lo sabemos con exactitud, podemos suponer que su densidad ρ no será muy alta. Tomaremos aquí el valor $\rho = 1\ \mathrm{g/cm^3}$.

También sabemos que Ultima Thule rota sobre sí mismo alrededor de un eje perpendicular a la línea que une los centros de Ultima (U) y Thule (T) y que pasa por el centro de masas CM del sistema, tal y como se muestra en la figura. El periodo de rotación es aproximadamente 15 h. El CM del sistema se encuentra a una distancia de 5/3 km del centro de U.

a. Determinar si la atracción gravitatoria entre Ultima y Thule es suficiente para mantenerlos unidos o si por el contrario es necesario encontrar algún otro tipo de justificación que explique por qué no se separan debido a la rotación.

Para resolver el problema supondremos que Ultima y Thule son dos esferas perfectas en contacto (Al parecer, y según los análisis recientes, su forma se parece más a lentejas gruesas)





Solución:

Aunque se ha dado como dato la posición del Cm, su cálculo sería como sigue:

El CM del sistema estará más cerca de U que de T, pues el tamaño y la masa de Última (M_U) es mayor que el tamaño y masa (M_T) de Thule. Suponiendo ambos cuerpos esféricos y de radios R_U y R_T conocidos, sus masas se pueden obtener conociendo la densidad ρ

$$M_U = \frac{4}{3}\pi R_U^3 \rho \quad , \quad M_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho$$

Casualmente $R_U = 2R_T$, por tanto $M_U/M_T = (R_U/R_T)^3 = 2^3 = 8$, es decir $M_U = 8M_T$. Ambas relaciones simplificarán las expresiones.

Para encontrar la posición del CM del sistema tomemos el eje que une los centros de Ultima (U) y Thule (T) y llamemos X a la posición del CM sobre dicho eje, contada desde U. Si las posiciones de U y T en el eje son $X_U = 0$ y $X_T = R_U + R_T = 3R_T = 15\ \mathrm{km}$, entonces

$$X = \frac{1}{M_U + M_T}(M_U X_U + M_T X_T) = \frac{M_T X_T}{M_U + M_T} = \frac{M_T X_T}{8M_T + M_T} = \frac{X_T}{9} = \frac{3R_T}{9} = \frac{R_T}{3} = \frac{5}{3}\ \mathrm{km}$$

Para saber si la fuerza gravitatoria es suficiente para mantenerlos unidos, debemos comprobar que es suficiente para proporcionar la aceleración centrípeta a la que están sometidos debido a su giro alrededor del CM. La fuerza gravitatoria vendrá dada por la Ley de Gravitación Universal de Newton teniendo en cuenta la distancia entre sus centros $R_U + R_T = 3R_T$ y sus masas $M_U = 8M_T$

$$F = G\frac{M_U M_T}{(R_U + R_T)^2} = G\frac{8M_T M_T}{(3R_T)^2} = G\frac{8}{9}\frac{M_T^2}{R_T^2}$$

Fijándonos por ejemplo en el caso de Thule podemos calcular la aceleración gravitatoria g usando la segunda ley de Newton

$$g = \frac{F}{M_T} = G\frac{8}{9}\frac{M_T}{R_T^2} = G\frac{8}{9}\frac{\left(\frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho\right)}{R_T^2} = G\frac{32}{27}\pi\rho R_T$$

La aceleración centrípeta correspondiente a la rotación será $a_c = \omega^2 r$, siendo ω la velocidad angular y r el radio de giro, que es distinto para cada cuerpo. Tomando por ejemplo el caso de Thule, el radio de giro es $r = 3R_T - R_T/3 = 8R_T/3$ y la aceleración centrípeta

$$a_c = \omega^2 r = \omega^2 \frac{8R_T}{3}$$

Donde la velocidad angular puede calcularse sabiendo el periodo $T = 15\ \mathrm{h} = 54000\ \mathrm{s}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{54000} = 1.16 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{rad/s}$$

Para que el sistema permanezca unido, basta con que g sea mayor que a_c, es decir $g/a_c > 1$. Este cociente es (usando $\rho = 1\ \mathrm{g/cm^3} = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$)

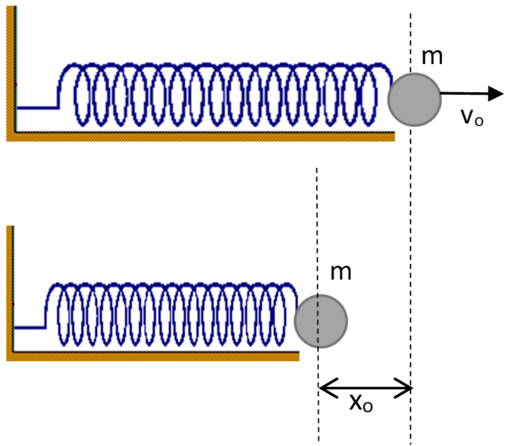
$$\left(\frac{g}{a_c}\right)_{Thule} = \frac{G\frac{32}{27}\pi\rho R_T}{\omega^2 \frac{8R_T}{3}} = G\frac{4}{9}\pi\frac{\rho}{\omega^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{4}{9}\pi\frac{1000}{(1.16 \cdot 10^{-4})^2} = 6.9$$

En el caso de Última, la fuerza es la misma pero $g = F/M_U$ es 8 veces menor que en el caso de Thule. La aceleración centrípeta será $a_c = \omega^2 r$ con $r = R_T/3$, es decir, también 8 veces menor. Por tanto tenemos el mismo valor para el cociente g/a_c (como debe ser, dado que evidentemente la condición de separarse ha de ser la misma).Como el cociente es sobradamente mayor que 1, el sistema permanece unido simplemente por su atracción gravitatoria. Nótese que la condición de separación depende de la densidad ρ . El hecho de que permanezcan juntos implica un valor mínimo de ρ.

4

Dos partículas iguales de masa m están unidas a dos resortes de constantes elásticas k_1 y k_2. En el mismo instante a la masa que está unida al primer resorte se le comunica, estando situada en su posición de equilibrio, una velocidad v_o hacia la derecha, y la masa que está unida al segundo resorte se suelta desde una distancia x_o a la izquierda de su posición de equilibrio, tal y como se indica en la figura. Calcular:

a. La ecuación del movimiento de cada partícula respecto a la posición de equilibrio
b. La relación que debe existir entre k1 y k2 para que ambas partículas alcancen por



primera vez su máxima elongación al mismo tiempo

Solución:

a) $x_{1=}A_1 sen(\omega_1 t+\varphi_{01})$ $\qquad \omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m}}$

$v_{1=}A_1\omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi_{01})$ $\qquad t=0 \quad \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \ \varphi_{01}=0,\pi \\ v_1=v_o=+A_1\omega_1 \rightarrow \varphi_{01}=0 \end{cases}$

$$A_1=\frac{v_0}{\omega_1}=v_0\sqrt{\frac{m}{k_1}}$$

$$x_1=v_o\sqrt{\frac{m}{k_1}}sen(\sqrt{\frac{k_1}{m}}t)$$

$x_{2=}A_2 sen(\omega_2 t+\varphi_{02})$ $\qquad \omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m}}$

$v_{2=}A_2\omega_2\cos(\omega_2 t+\varphi_{02})$ $\qquad t=0 \quad \begin{cases} x_2=-x_0=A_2 sen\varphi_{02}<0 \rightarrow A_2=x_0 \\ v_2=0 \rightarrow \varphi_{02}=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_{02}=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$x_2 = x_o sen(\sqrt{\frac{k_2}{m}}t - \frac{\pi}{2})$$

b) En el mismo instante t, $x_{1=}A_1$ y $x_{2=}A_2 \rightarrow \sqrt{\frac{k_1}{m}}t = \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{k_2}{m}}t - \frac{\pi}{2} \;\; \rightarrow \;\; \sqrt{\frac{k_1}{m}}t = \frac{\pi}{2}, \;\; \sqrt{\frac{k_1}{m}}t = \pi$

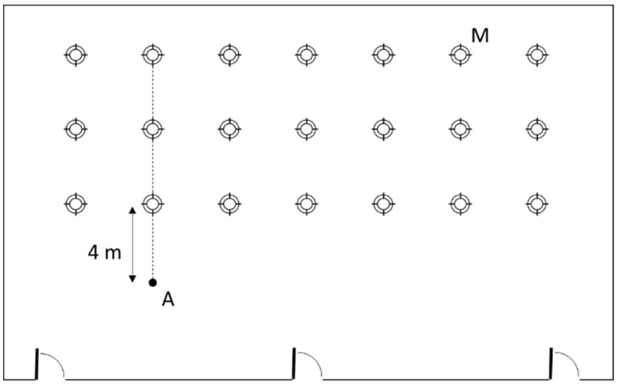
$\frac{k_2}{k_1} = 4.$ (La masa del resorte k_1 ha utilizado un cuarto de periodo, $T_1/4$, y la de k2 medio periodo, $T_2/2$)

5

Una nave industrial tiene un grupo de máquinas de distintas características que están distribuidas en tres filas y siete columnas, como se muestra en la figura. La separación entre dos filas o dos columnas cualesquiera es 4 m. El punto A se encuentra alineado con la segunda columna de máquinas y a 4 m de la primera máquina de esa columna.

Cuando todas las máquinas funcionan, el nivel de intensidad sonora en A es 90 dB. En un momento dado la máquina señalada con la letra M se detiene y entonces se constata que el nivel de intensidad sonora en A se reduce a 87 dB.

a. Suponiendo que la fuente de sonido es isótropa, calcular la potencia acústica (en W/m^2) emitida por la máquina M. (Intensidad correspondiente al umbral de audición: 10^{-12} W/m^2)



Solución:

El nivel de intensidad sonora β viene dado por

$$\beta = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Con $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$.

En nuestro caso tenemos dos situaciones. En la situación 1 todas las máquinas funcionan y el nivel de intensidad sonora es $\beta_1 = 90$ dB. A este nivel le corresponderá una intensidad sonora I_1 que se obtiene de la ecuación anterior.

$$I_1 = I_0 10^{\beta_1/10} = 10^{-12} \cdot 10^{90/10} = 10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$$

En la situación 2, con la máquina M apagada, el nivel de intensidad sonora es $\beta_2 = 87$ dB que se corresponde con una intensidad I_2

$$I_2 = I_0 10^{\beta_2/10} = 10^{-12} \cdot 10^{87/10} = 5.012 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W/m^2} \approx 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W/m^2}$$

Si llamamos I_M a la intensidad en A debida exclusivamente a la máquina M, entonces

$$I_M = I_1 - I_2 = 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W/m^2}$$

La relación entre intensidad acústica I y potencia P para una fuente puntual isótropa es

$$I = \frac{P}{4\pi d^2}$$

Y a partir del dibujo la distancia d entre A y M es

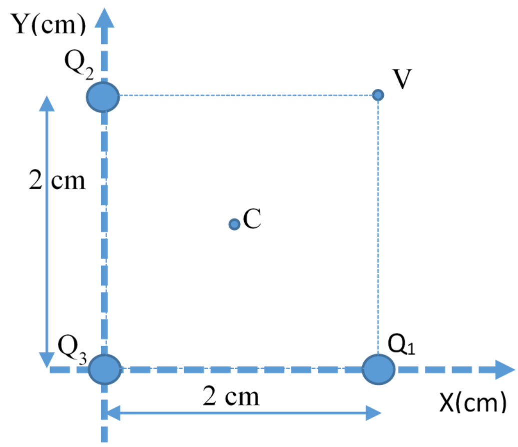
$$d = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20\ \mathrm{m}$$

Luego la potencia acústica de la máquina P_M

$$P_M = 4\pi d^2 I_M = 4\pi \cdot (20\ \mathrm{m})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W/m^2} = 2.5\ \mathrm{W}$$

6

Tres cargas puntuales Q_1 , Q_2 y Q_3 se hallan en los vértices de un cuadrado de 2 cm de lado tal y como se muestra en la figura. La carga Q_1 tiene un valor de $-10\ \mu C$ y el campo eléctrico en el vértice V (2cm, 2cm), no ocupado por carga alguna, es cero.



a) Determinar el valor de las cargas Q_2 y Q_3

Dejamos libre una carga $Q = +1\ \mu C$ cuya masa es de $1\ g$ en el centro C del cuadrado,

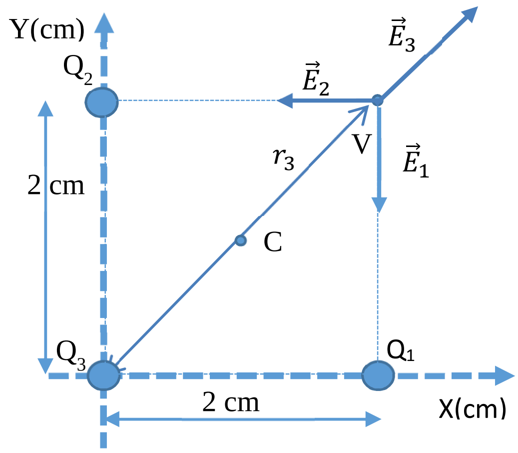
b) ¿En que dirección se moverá la carga? Razonar la respuesta

c) ¿qué velocidad tendrá cuando recorra una distancia $d = \sqrt{2}\ cm$?

Solución:

a) $\overrightarrow{E_V} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \overrightarrow{E_3} = 0$

Para que se anule el campo en V, la carga Q_2 debe ser negativa y Q_3 positiva como indica la figura



$$E_{Vy} = |E_3| cos45 - |E_1| = 0$$

$$E_{Vx} = |E_3| sen45 - |E_2| = 0$$

$$|E_3| = k\frac{Q_3}{r_3^2}, \quad |E_2| = k\frac{|Q_2|}{r_2^2}, \quad |E_1| = k\frac{|Q_1|}{r_1^2},$$

$$r_1 = r_2 = 2cm, \qquad r_3 = 2\sqrt{2}cm$$

$|E_1| = |E_2| \quad \rightarrow \quad Q_1 = Q_2 = -10\ \mu C$

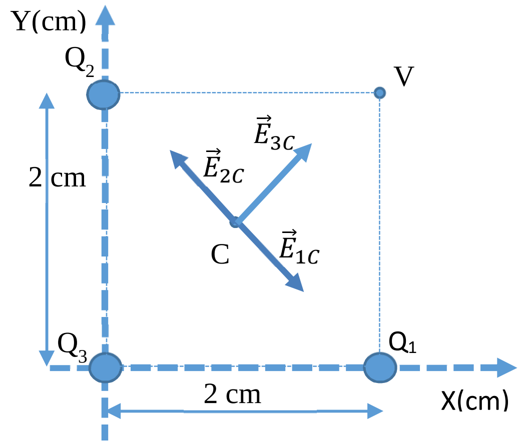
$$k\frac{Q_3}{r_3^2} cos45 = k\frac{|Q_2|}{r_2^2}$$

$$Q_3 = \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 \frac{|Q_2|}{cos45} = 28{,}28\ \mu C$$

b) Estudiamos la fuerza $\vec{F} = Q\overrightarrow{E_C}$ que experimenta la carga Q en el punto C

$$\overrightarrow{E_C} = \overrightarrow{E_{1C}} + \overrightarrow{E_{2C}} + \overrightarrow{E_{3C}} = \overrightarrow{E_{3C}}$$

La carga se moverá hacia V



c) Cuando recorra $\sqrt{2}m$ habrá alcanzado el punto V.

Por conservación de la energía

$$QV_c + \frac{1}{2}mv_C^2 = QV_v + \frac{1}{2}mv_V^2$$

$$v_V^2 = \frac{2Q}{m}(V_C - V_V)$$

Calculamos potenciales: $r_{1C} = r_{2C} = r_{3C} = \sqrt{2}cm \quad r_{1V} = r_{2V} = 2cm, \; r_{3V} = 2\sqrt{2}cm$

$$V_C = k\frac{Q_1}{r_{1C}} + k\frac{Q_2}{r_{2C}} + k\frac{Q_3}{r_{3C}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}}(-10 - 10 + 28{,}28) = 5{,}27 \cdot 10^6 \, V$$

$$V_V = k\frac{Q_1}{r_{1V}} + k\frac{Q_2}{r_{2V}} + k\frac{Q_3}{r_{3V}} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}\left(\frac{-10}{2} - \frac{10}{2} + \frac{28{,}28}{2\sqrt{2}}\right) = 0 \, V$$

La velocidad

$$v_V = \sqrt{\frac{2Q}{m}(V_C - V_V)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}}(5{,}27 \cdot 10^6)} = 102{,}7\,\frac{m}{s}$$

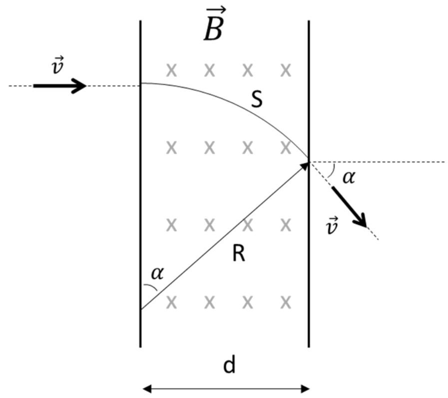
7

Una partícula de 1 ng de masa y con una carga de 3 μC entra en una región del espacio de 10 cm de espesor donde existe un campo magnético uniforme de 0,01 T, perpendicular a la dirección de la velocidad de la partícula. A la salida de dicha región la velocidad de la partícula forma un ángulo de 30º respecto de la dirección original de su movimiento. Calcular:

a) La velocidad de la partícula
b) El tiempo que tarda en atravesar la región donde existe campo magnético.

Solución:

a) En la región donde existe un campo magnético la partícula experimentará una fuerza magnética, obligándole a describir un arco de circunferencia, con una aceleración centrípeta v^2/R. Sabiendo que



$$\left|\vec{F}_m\right| = \left|q\vec{v} \times \vec{B}\right| = qvB$$

Siendo q el valor absoluto de la carga. La segunda Ley de Newton nos dice que

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

Y por tanto

$$qB = m\frac{v}{R}$$

De la geometría del problema sabemos que $\text{sen}\alpha = d/R$ y por tanto $R = \frac{d}{\text{sen}\alpha} = 2d = 0.2\ \text{m}$ con lo que nos queda

$$v = \frac{qB \cdot 2d}{m} = \frac{3\ 10^{-6}\ \text{C} \cdot\ 0.01\ \text{T} \cdot 2 \cdot 0.1\ \text{m}}{10^{-9}\ \text{kg}} = 6\ \text{m/s}$$

Para calcular el tiempo t que tarda en salir podemos usar la longitud de arco $S = R \cdot \alpha$ y tener en cuenta que el módulo de la velocidad v es constante.

$$v = \frac{S}{t} \;\Rightarrow\; t = \frac{S}{v} = \frac{R \cdot \alpha}{v}$$

Donde $\alpha = \frac{\pi}{6}\text{rad},\ \ R = 0.2\ \text{m}$

$$t = \frac{0.2\ \text{m}}{6\ \text{m/s}} \cdot \frac{\pi}{6} = 0.0175\ \text{s}$$

8

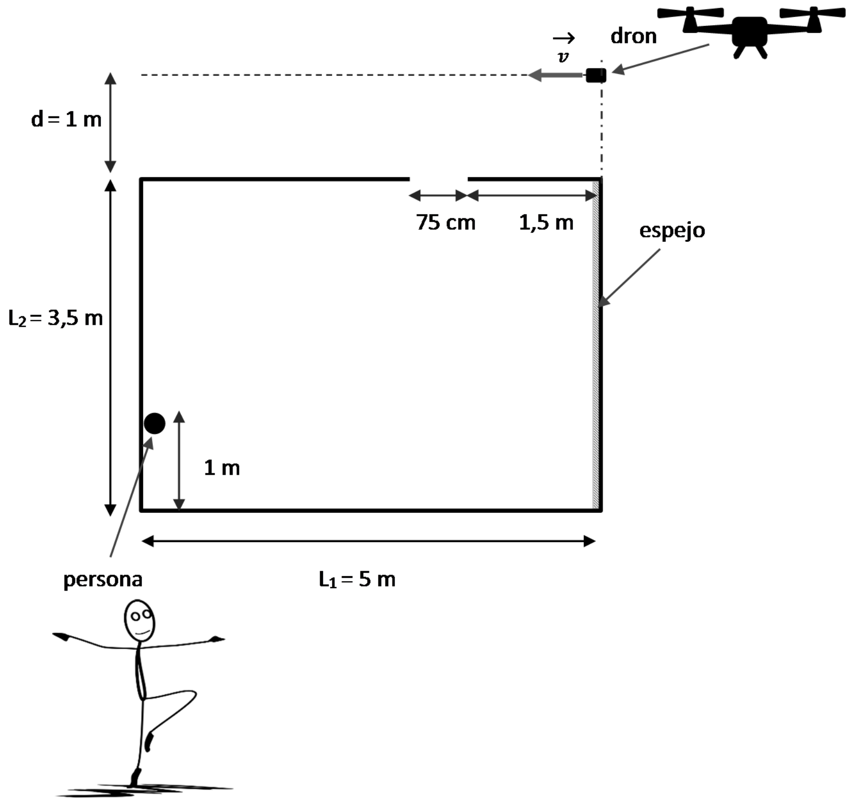
Una persona se encuentra haciendo gimnasia en una sala con un espejo. De repente ve pasar un dron por la ventana y desaparecer 1,5 segundos después. Si el dron se mueve con velocidad constante en una trayectoria horizontal paralela a la pared exterior de la sala.

a) ¿Cuál es la velocidad del dron?

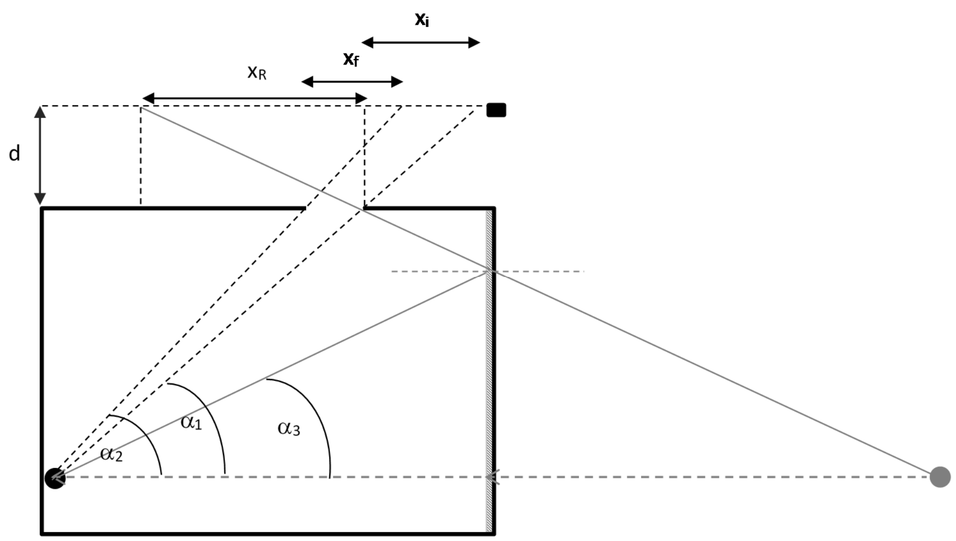
b) ¿Cuánto tiempo pasará hasta que lo vea reflejado en el espejo?

c) ¿Cambiaría este tiempo si la distancia “d” entre la trayectoria del dron y la pared fuese mayor o menor que la indicada?

d) ¿Existiría alguna distancia d a la que pudiera ver el dron y su reflejo al mismo tiempo?



Solución:



Si llamamos x_i a la distancia entre la parte derecha de la ventana al punto donde comienza a ver el dron:

$$\tan \alpha_1 = \frac{2{,}5}{3{,}5} = \frac{d}{x_i}$$

Si llamamos x_f a la distancia entre la parte izquierda de la ventana al punto donde deja de ver el dron:

$$\tan \alpha_2 = \frac{2{,}5}{2{,}75} = \frac{d}{x_f}$$

Siendo d = 1m

$$x_i = 1{,}4 \text{ m} ;\ x_f = 1{,}1 \text{ m} ;$$

Por lo tanto $x_i - x_f - \text{anchura de la ventana es la distancia que recorre en 1,5 s}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1{,}4 - 1{,}1 + 0{,}75}{1{,}5} = \frac{1{,}05}{1{,}5} = 0{,}7\,{}^{m}/_{s}$$

Si llamamos x_R a la distancia entre el punto en que se verá el reflejo del dron y la parte derecha de la ventana:

$$\tan \alpha_3 = \frac{2{,}5}{6{,}5} = \frac{d}{x_R} \Rightarrow x_R = 2{,}6\ m$$

Juntando todo, el espacio que habrá recorrido el dron, desde donde desapareció de la vista hasta donde aparece su reflejo es:

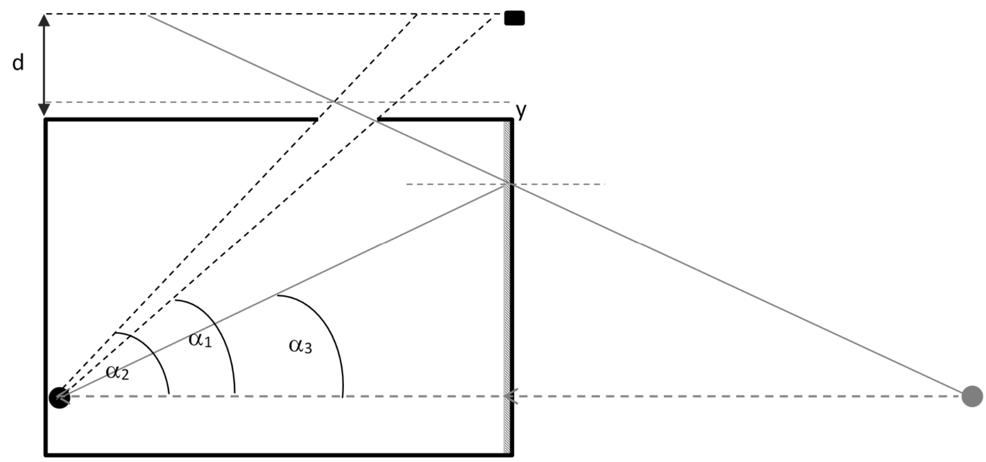
$$2{,}6 + 1{,}1 - 0{,}75 = 2{,}95\ m$$

Y por lo tanto, sabiendo que su velocidad es 0,7 m/s, el tiempo que tarda en verse su reflejo es:

$$t = \frac{2{,}95}{0{,}7} = 4{,}21\ s$$

Del propio dibujo y de las ecuaciones se puede deducir que si la distancia d cambia, cambiarán los resultados, existiendo incluso un punto en el que se puede ver el dron y su reflejo al mismo tiempo, el punto de corte entre el rayo reflejado y la línea que une la posición de la persona con el punto en el que desaparecía de la vista el dron.

Llamando "y" a la distancia de este punto a la pared del edificio, volvemos a repetir los cálculos para hallar su valor (el cálculo es simple sustituyendo el valor "d" por "y" en las ecuaciones (número)



y encontrando los nuevos valores de x_f y x_R

$$\tan \alpha_2 = \frac{2{,}5}{2{,}75} = \frac{y}{x_f}$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{2{,}5}{6{,}5} = \frac{y}{x_R}$$

$$x_R = 0{,}75 - x_f \Longrightarrow y = 0{,}2\ \mathrm{m}$$