El principio de inducción

Un ejemplo sencillo para empezar

Si hemos oído hablar de progresiones aritméticas (series de números de forma que la diferencia entre cada dos consecutivos es siempre la misma, como 1, 4, 7, 10,...) probablemente no será fácil calcular la suma de varios de estos términos, siempre y cuando sean consecutivos, y más aún si me piden calcular la suma de los primeros n enteros positivos, es decir, $1+2+3+...+n$. Podemos ver que, si escribimos los mismos números pero al reves, y luego voy sumando los dos primeros de cada serie, los dos segundos de cada serie, etc, obtengo en cada una de las sumas $1+n=2+(n-1)=3+(n-2)=... =(n-1)+2=n+1$, es decir, obtengo n sumas, cada una de las cuales vale $(n+1)$, cuando sumo consigo mismo el número que me piden hallar. El resultado pedido es por lo tanto, para cada entero positivo n,

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Esta forma de operar no me valdría sin embargo si me piden hallar el valor de la suma $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ para cualquier entero positivo n, o peor aún, si me piden hallar $1^3+2^3+3^3+...+n^3$.

¿Se cumple para todos los enteros positivos?

Hay veces que nos preguntan si algo se cumple para todos los enteros positivos. ¡No podemos ponernos a probar todos, hay infinitos! A veces, la demostración es relativamente sencilla, otras no. El principio de inducción nos ayuda a "dar el salto al infinito", de la siguiente manera: supongamos que nos piden demostrar algo para (1,2,3,...), y que puedo demostrar fácilmente que se cumple para 1. Si además consigo demostrar que, si se cumple para un natural, se cumple para el siguiente, entonces, ¡ya lo he demostrado para todos! Como se cumple para 1, y se cumple para el siguiente, entonces se cumple para 2; pero entonces también se cumple para el siguiente, es decir, para 3; y también para 4, 5,... De repente, hemos llegado al infinito, ¡con sólo dos pasos! El primero, demostrarlo para un caso particular (caso base), y el segundo, demostrar que si se cumple para un entero, se cumple también para el siguiente.

Veamos como funcionaría con el ejemplo anterior, es decir, supongamos que nos piden específicamente demostrar por inducción que, para todo entero positivo n, se cumple

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}.$$

Para $n=1$, la suma del primer entero positivo es 1, y cumple la fórmula que queremos demostrar, pues haciendo $n=1$ en dicha fórmula, se tiene

$$1=\frac{1(1+1)}{2},$$

que es claramente cierto. Supongamos ahora que la fórmula anterior es válida para n (a asumir que el resultado que queremos demostrar es cierto para un valor n, se le llama "hipótesis de inducción") ¿Qué pasaría para $n+1$? Bueno, ya sabemos cuál es la suma de los n primeros números, así que nos basta con sumarle $n+1$:

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

La fórmula es idéntica a la de n, pero con $n+1$ en su lugar, con lo que si se cumple para n, entonces también se cumple para $n+1$, es decir, como se cumple para 1, entonces se cumple para 2, luego por lo tanto también para 3, y para 4, 5,..., es decir, se cumple para todos los enteros positivos.

El conjunto de las partes de un conjunto

Sea un conjunto A cualquiera de 4 elementos, que llamaremos $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. El conjunto de las partes de A es el conjunto formado por todos los posibles subconjuntos de A (sí, podemos definir un conjunto cuyos elementos, en vez de "elementos sueltos", sean conjuntos). Como ya sabemos, el conjunto vacío $\varnothing=\{\}$, es decir, el conjunto sin ningún elemento, es subconjunto de todos los conjuntos. También, todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Ya tenemos dos. Además, tenemos todos los subconjuntos de un único elemento, de los cuáles hay 4 (uno por cada elemento que podemos tomar), todos los subconjuntos de 2 elementos, y de 3 elementos. Podemos calcular que hay un total de 16, que "casualmente" es 2^4. Si lo escribimos, tendremos que el conjunto de las partes de A (lo llamaremos $P(A)$ para abreviar) es

$$P(A)=\left\{\begin{array}{l}\{\ \},\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_4\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_1,a_4\},\{a_2,a_3\},\{a_2,a_4\},\\ \{a_3,a_4\},\{a_1,a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_4\},\{a_1,a_3,a_4\},\{a_2,a_3,a_4\},\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\end{array}\right\}.$$

Supongamos ahora que nos dan ahora otro conjunto, con n elementos, $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$, donde ahora n puede tomar un valor entero positivo cualquiera. ¿Cuántos elementos tendrá el conjunto de las partes de este conjunto? Nos dicen que este valor es 2^n, sea cual sea n, pero nos piden que lo demostremos ¡para los infinitos valores naturales de n! Podríamos pensar que es muy difícil, pero por suerte tenemos el principio de inducción, que aplicamos a continuación:

Paso 1: caso $n=1$. Para $n=1$, tendríamos un conjunto $A=\{a_1\}$, que claramente tiene exactamente dos subconjuntos, el conjunto vacío, y el propio conjunto A. Luego en este caso efectivamente el conjunto de las partes de A tiene exactamente $2=2^1$ elementos, y se cumple el resultado.

Paso 2: supongamos que el resultado se cumple para n, siendo n mayor o igual que 1, y veamos que se cumple también para $n+1$, sea cual sea el valor de n; esto es claramente equivalente a decir "si se cumple para un entero positivo cualquiera, se cumple para el siguiente". Tendríamos entonces que $A=\{a_1,a_2,a_3,...,a_{n+1}\}$. Podemos dividir los subconjuntos de A en dos tipos distintos: los que contienen a a_{n+1}, y los que no contiene a a_{n+1}. ¿Cuántos hay de cada uno? Bueno, es claro que si tengo un conjunto formado por la unión de un subconjunto de $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$, y además el conjunto $\{a_{n+1}\}$, este conjunto unión será también un subconjunto de A, y recíprocamente, todo subconjunto de A que contenga a a_{n+1} será la unión de $\{a_{n+1}\}$ y un subconjunto de $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$. Como asumo que hay exactamente 2^n subconjuntos de $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ por hipótesis de inducción, entonces hay exactamente 2^n subconjuntos de A de este primer tipo. Además, cualquier subconjunto de A que no contenga a a_{n+1}, claramente es un subconjunto de $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$, y viceversa, es decir, hay exactamente tantos subconjuntos de A que no contienen a a_{n+1}, como subconjuntos de $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$, nuevamente 2^n subconjuntos de A de este segundo tipo. Por lo tanto, si para un conjunto de n elementos, el conjunto de sus partes tiene 2^n elementos, entonces para un conjunto de $n+1$ elementos, el conjunto de sus partes tiene $2^n+2^n=2^{n+1}$ elementos, y si el resultado que nos piden demostrar se cumple para un entero, entonces se cumple para el siguiente. ¡Ya está!

Para todo n entero, el número de la forma $3n+1$ *es múltiplo de* 3

Supongamos (hipótesis de inducción) que es cierto que $3n+1$ es múltiplo de 3 para n. Entonces hay un entero m tal que $3n+1=3m$. Pero para $n+1$, tendríamos que $3(n+1)+1=3m+3=3(m+1)$, donde $m+1$ es entero por serlo m, y si se cumple para un entero n, entonces se cumple para el siguiente entero $n+1$.

¡¿Hemos demostrado algo imposible?! No, no lo hemos demostrado, porque nos falta el caso inicial. El caso inicial, para $n=1$, sería que 4 es múltiplo de 3, y eso sabemos que es falso. Queda claro que, si nos olvidamos el caso inicial, ¡todavía no hemos demostrado nada! Si no, según el ejemplo que acabamos de ver, podríamos haber demostrado algo ¡completamente imposible!

La inducción cuando no nos basta con n

Supongamos que, para demostrar que algo se cumple para el entero $n+1$, no me basta con asumir que se cumple para n, necesito que se cumpla para todos los enteros positivos menores que $n+1$. ¿Qué hago entonces? ¿Ya no puedo aplicar el principio de inducción? Bueno, con tal de haber demostrado que se cumple para un valor inicial $n=1$, y si para demostrar que se cumple para $n+1$ necesito que se cumpla para todo entero menor que $n+1$, no tengo problemas para el caso $n=1$, porque el único entero positivo menor que 2 es 1, y para ése ya sé que el resultado es cierto. Tampoco tengo problemas para el caso $n=2$, porque ya he demostrado que el resultado es cierto para 1 y para 2, que son todos los enteros positivos menores que 3, luego el resultado también será cierto para 3, y así sucesivamente. Es decir, puedo utilizar como hipótesis de inducción, no sólo que el resultado se cumple para n, sino que se cumple para $1,2,3,...,n$, a la hora de demostrar que se cumple para $n+1$.

La inducción "a saltos"

Puede darse el caso de que sea muy sencillo demostrar que, si el resultado que nos piden se cumple para n, entonces se cumple para $n+3$, pero muy difícil demostrar que, si se cumple para n, entonces se cumple para $n+1$. ¿Qué hacemos entonces? Bueno, si se cumple para $n=1$, entonces sabemos que se cumple para $n=4$, luego por lo tanto también para $n=7$, y para 10,13,16,... Con esto no nos basta, pero si además demostramos que el resultado se cumple para $n=2$, habremos demostrado también que se cumple para $n=5,8,11,...$, y si finalmente demostramos el resultado para $n=3$, lo habremos demostrado para $n=6,9,12,...$ ¡Ahora sí lo habremos demostrado para todo entero positivo! Nótese entonces que no necesitamos aplicar la inducción "de uno en uno", podemos ir dando saltos, con tal de que los casos iniciales que demostremos sean los suficientes para que, "dando saltos" del tamaño para el que hayamos demostrado que la propiedad se sigue cumpliendo, podamos llegar hasta cualquier entero positivo, desde alguno de los casos iniciales.

Ejemplo: demostrar por inducción que todo cuadrado perfecto o da resto 0, o da resto 1, al dividir por 4.

Solución: los cuadrados perfectos son todos los números de la forma n^2, para $n=1,2,3,...$, y es fácil ver que, como $(n+2)^2=n^2+4(n+1)$, entonces n^2 y $(n+2)^2$ dan el mismo resto al dividir por 4, con lo que si el resultado es cierto para n, entonces es cierto para $n+2$. Necesitamos (y nos basta con) demostrar que el resultado es cierto para los casos iniciales $n=1$, para el que $n^2=1$ da resto 1 al dividir por 4, y para $n=2$, para el que $n^2=4$ da resto 0 al dividir por 4. Claramente podemos llegar a cualquier entero positivo par dando saltos de 2 en 2, desde $n=2$, y para cualquier entero positivo impar dando saltos de 2 en 2, desde $n=1$, así que, ¡ya está! Además, es fácil ver que si el cuadrado perfecto es el cuadrado de un número par, entonces dará resto 0 (igual que 4) al dividir por 4, y si es el cuadrado de un número impar, entonces dará resto 1 (igual que 1) al dividir por 4. ¿Te atreverías ahora a demostrar que todo cuadrado perfecto da resto 0, 1 o 4 al dividir por 8?

¿Qué hacemos cuando no sabemos lo que hay que demostrar?

En los casos anteriores, nos han pedido que demostráramos algo. ¿Qué podemos hacer si nos hallar una expresión y demostrarla, pero no sabemos cómo es la expresión? Supongamos que nos piden hallar cuánto vale la suma de los primeros n cuadrados perfectos; por comodidad, llamemos S_n a esta suma. Para $n=1$, claramente $S_1=1^2=1$, para $n=2$, se tiene $S_2=1^2+2^2=5$, para $n=3$, se tiene $S_3=1^2+2^2+3^2=14$, etc. Pero, ¿cuál es la fórmula general? Como la suma de $1,2,3,...,n$ se puede expresar, como ya hemos visto antes, como un polinomio de grado 2 en n, podemos pensar que la suma de $1^2,2^2,3^2,...,n^2$ tal vez se pueda expresar como un polinomio de grado 3 en n (aumentando en cada caso en 1 el grado del polinomio que nos da el resultado respecto al grado que tienen los sumandos). En el caso más general, (todavía no sabemos si es cierto), ¿podría ser

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=an^3+bn^2+cn+d\,?$$

En esta expresión, *a*, *b*, *c* y *d* son constantes que necesito calcular. Para hallar estas constantes, utilizo los casos más sencillos de calcular, es decir, aquellos para los que *n* vale 1, 2, 3 y 4. Así, si la suma de los *n* primeros cuadrados perfectos tuviera efectivamente la forma anterior, podemos generar un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, que resolvemos por eliminación de variables, restando a cada ecuación la anterior del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=14 \\ 64a+16b+4c+d=30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 19a+5b+c=9 \\ 37a+7b+c=16 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 12a+2b=5 \\ 18a+2b=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=4 \\ 12a+2b=5 \\ 6a=2 \end{array}\right\}$$

Hallamos entonces de la cuarta ecuación el valor de *a*, sustituimos en la tercera para hallar *b*, en la segunda para hallar *c* y finalmente hallamos *d* de la primera ecuación, resultando en la siguiente hipótesis:

$$¿1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}?$$

Esto, si es cierto (todavía seguimos sin saberlo), es lo que queremos demostrar por inducción. Claramente, sustituyendo *n*=1, tenemos que el miembro de la derecha vale en efecto 1, así que se cumple para el caso inicial. Ahora bien, si se cumple para *n*, se tendría que

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+n^2+2n+1=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}=$$

$$=\frac{2(n^3+3n^2+3n+1)+3(n^2+2n+1)+(n+1)}{6}=\frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1)}{6},$$

con lo que también se cumpliría para *n*+1, y ahora sí sabemos que el resultado que nosotros mismos hemos conjeturado es cierto, y hemos acabado.

Es posible que, después de conjeturar una hipótesis, es decir, de pensar que algo que me piden hallar toma una determinada forma, me dé cuenta de que no es así, porque encuentro algún caso en el que no se cumple; por ejemplo, en el caso anterior, hemos hallado una hipótesis que vale para *n*=1,2,3,4, pero a lo mejor podría haber fallado para *n*=5. Tendría entonces que volver atrás y conjeturar otra hipótesis distinta.

¿Te atreverías a demostrar por inducción cuánto vale la suma de los *n* primeros cubos, es decir, cuánto vale $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$, para cualquier entero positivo *n*? Pista: el valor se puede expresar como un polinomio de grado 4 en *n*.

<u>Cuando nos piden demostrar algo para números muy grandes</u>

Hay veces que no nos piden demostrar algo para todo entero positivo, pero me piden hallar o demostrar algo para un entero tan ridículamente alto, que si intentara hacerlo "por fuerza bruta", ¡tardaría años! Hay veces que es mejor demostrarlo para todo entero positivo, o hallar y demostrar una fórmula para todo entero positivo, y luego aplicarla al caso que me piden. El último ejemplo de los ejercicios propuestos puede ser un tal caso.

Ejercicios propuestos

Definimos una sucesión de números enteros como sigue: $a_1=1$, $a_2=1$, y para todo entero n mayor que 2, calculamos a partir de valores anteriores $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$; es decir, cada elemento de la sucesión, menos los dos primeros, es la suma de los dos anteriores. La sucesión sería entonces (1,1,2,3,5,8,13,21,34,...), y se conoce como sucesión de Fibonacci, y los números que la integran son los números de Fibonacci. Demuestra por inducción los siguientes resultados:

1) $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

2) Si n es múltiplo de 5, entonces a_n también es múltiplo de 5.

3) Para todo n mayor o igual que 2, se cumple que $a_{n+1}a_{n-1} - a_n{}^2 = (-1)^n$.

Demuestra por inducción la fórmula del binomio de Newton, es decir, para cualesquiera valores constantes a, b, y para cualquier entero positivo n, se tiene que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n .$$

En un estanque hay 2009 nenúfares en fila, con flores alternando colores blanco, azul, blanco, azul,..., blanco. Una ranita salta desde el primer nenúfar hasta el último, sin cambiar de sentido (es decir, sin retroceder), de forma que el nenúfar desde el que sale y al que llega en cada salto, tienen flor de distinto color. Demuestra que el número de caminos distintos que puede tomar la ranita (es decir, de secuencias de saltos que difieran al menos en la posición que ocupa la rana tras uno de los saltos) es múltiplo de 3.

Pista: si llamamos c_n al número de caminos posibles cuando hay $2n+1$ nenúfares, demuestra que, para todo entero positivo n, se cumple

$$c_{n+2} = 2c_{n+1} + c_n + c_{n-1} + \ldots + c_2 + c_1 + 1,$$

y aplica inducción para poner c_{n+2} en función sólo de c_{n+1} y c_n.