Polinomios y las relaciones de Cardano-Vieta

Raíces y divisibilidad de polinomios

Es conocido que la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ tiene, caso de que el discriminante $D=b^2-4ac$ sea positivo o cero, dos soluciones,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si nos encontramos con una ecuación de tercer grado o más, ¿cómo podemos resolverla? Si tenemos un polinomio $P(x)$ que se anula cuando sustituimos $x=r$, decimos que r es una raíz del polinomio. Sabemos además que podemos dividir $P(x)$ entre $x-r$, es decir, existe un polinomio $Q(x)$, de grado una unidad menor que el grado de $P(x)$, tal que $P(x)=(x-r)Q(x)$. Así, si hallamos una solución de una ecuación de grado 3 o mayor, (es decir, una raíz r de un polinomio de grado mayor o igual que 3), sabemos que el resto de soluciones, si existen, serán raíces del polinomio cociente $Q(x)$. Hemos encontramos entonces una solución y a la vez hemos simplificado el problema. En los problemas de Olimpiada, la mayor parte de las veces las ecuaciones de grado mayor que 2 están preparadas para que al menos una raíz se pueda encontrar fácilmente por prueba y error, pudiendo entonces pasar a ecuaciones de grado menor, hasta llegar finalmente a ecuaciones de grado 2. Hay veces que es relativamente sencillo reducir el grado de la ecuación, aunque no necesariamente hallando raíces; así, si nos piden hallar todas las soluciones de

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=0,$$

vemos que no encontramos a simple vista ninguna raíz. Sin embargo, sí podemos darnos cuenta de que los términos de grado 4, 2 y 0 forman el polinomio $(x^2+1)^2$; además, los otros dos términos son $x(x^2+1)$; vemos entonces que podemos escribir el polinomio como

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right),$$

y la ecuación ¡no tiene soluciones reales! Al igual que en este caso, nos puede pasar en otros; lo que siempre es cierto en cualquier caso, es que todo polinomio de grado n con exactamente m raíces reales puede escribirse en la forma

$$P(x)=a_n(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_m)\left(x^2+b_1x+c_1\right)\left(x^2+b_2x+c_2\right)\ldots\left(x^2+b_lx+c_l\right),$$

donde $n=m+2l$, y ninguna de las ecuaciones $x^2+b_kx+c_k=0$ tiene solución (es decir, todas tienen discriminante negativo).

Raíces y divisibilidad de polinomios (para los que conozcan los números complejos)

El teorema fundamental del álgebra nos dice que un polinomio de una variable, distinto de la constante 0, tiene exactamente tantas raíces como su grado, pudiendo algunas raíces ser iguales, y algunas de ellas ser complejas. Si además los coeficientes del polinomio son reales, las raíces no reales vienen en pares conjugados, es decir, si $a+bi$ es una raíz, donde i es la unidad imaginaria y a y b son reales, entonces $a-bi$ también es una raíz. Si además a_n es el coeficiente del término x^n, siendo n el grado del polinomio, entonces el polinomio se puede escribir como

$$P(x)=a_n(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n),$$

siendo $r_1,r_2,\ldots,r_n$ las n raíces reales o complejas del polinomio $P(x)$ de grado n. Además, si las raíces r_1 y r_2 son complejas conjugadas, entonces son de la forma $r_1=a+bi$, $r_2=a-bi$, y tenemos que son solución de

$$(x-r_1)(x-r_2)=(x-a-bi)(x-a+bi)=x^2-2ax+a^2+b^2,$$

es decir, de una ecuación de segundo grado con discriminante negativo. ¡Claro, de estas raíces complejas a pares conjugados es de donde vienen los trinomios que aparecían en el párrafo anterior!

Relaciones de Cardano-Vieta

Si se nos pide hallar dos números a y b, conocida su suma s y su producto p, podemos eliminar por ejemplo b:

$$b = s - a; \qquad p = ab = sa - a^2; \qquad a^2 - sa + p = 0.$$

Tenemos entonces que a es una de las raíces de la ecuación $x^2-sx+p=0$. Pero, ¿cuál? Y además, ¿qué pasa con la otra raíz? Si procedemos de la misma forma, pero eliminando a en vez de b, obtenemos que $b^2-sb+p=0$. Entonces, en la ecuación $x^2-sx+p=0$, una de las soluciones es a, y la otra es b. ¿Cuál es cuál? Bueno, no nos importa demasiado, ya que podemos intercambiar el papel de a y de b sin afectar ni a su suma ni a su producto. La conclusión de esta manipulación es que, conocidos la suma s y el producto p de dos números, sabemos que estos dos números son las dos raíces de la ecuación $x^2-sx+p=0$. Si esta ecuación tiene discriminante negativo, entonces o los números son complejos, o nos han intentado engañar y los valores que nos han dado de s y de p no pueden ser la suma y el producto de dos números reales.

El caso anterior se puede generalizar: podemos escribir un polinomio cualquiera de las dos formas siguientes, bien de la forma tradicional expresándolo como suma de términos de la forma x^k, cada uno de ellos multiplicado por su correspondiente coeficiente, bien factorizado como binomios de la forma $x-r$ donde r es cada una de sus raíces:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n).$$

Si realizamos el producto del miembro de la derecha, y comparamos los coeficientes de cada x^k, obtenemos

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -a_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) \\
a_{n-2} &= a_n(r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_1r_n + r_2r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n) \\
a_{n-3} &= a_n(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n) \\
&\ldots \\
a_1 &= (-1)^{n-1}a_n(r_1r_2\ldots r_{n-2}r_{n-1} + r_1r_2\ldots r_{n-2}r_n + \ldots + r_2\ldots r_{n-1}r_n) \\
a_0 &= (-1)^n a_n r_1 r_2 \ldots r_{n-1} r_n
\end{aligned}$$

Éstas son las conocidas como relaciones de Cardano-Vieta, y permiten expresar los coeficientes de un polinomio de cualquier grado, en función de sus raíces. Las aplicaciones de este resultado son múltiples, pero veamos algunas de ellas mediante ejemplos:

Calcular los números p y q tales que las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$ sean D y $1-D$, siendo D el discriminante de esa ecuación de segundo grado.

Por las relaciones de Cardano-Vieta, $p=-(D+1-D)=-1$, y $q=D(1-D)=D-D^2$, con lo que al ser el discriminante $D=p^2-4q$, se tiene que

$$D = 1 - 4D + 4D^2; \qquad 4D^2 - 5D + 1 = 0.$$

$$D = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = 1, \frac{1}{4}.$$

Si $D=1$, tenemos que $q=0$, y si $D=1/4$, tenemos que $q=3/16$.

Consideramos los polinomios $P(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$, $Q(x)=3x^2+2Ax+B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros reales). Supongamos que si a, b, c son las tres raíces de P, las de Q son $(a+b)/2$, $(b+c)/2$. Determinad todos los posibles polinomios P, Q.

Aplicando las relaciones de Cardano-Vieta al primer polinomio, tenemos

$$A=-(a+b+c),$$
$$B=ab+bc+ca,$$
$$C=-abc.$$

Aplicándolas al segundo, obtenemos

$$2A=-3\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}\right),$$
$$B=3\frac{a+b}{2}\frac{b+c}{2}.$$

Igualando los valores de A y de B en ambos casos, se tiene

$$A=-3\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}\right)=-2(a+b+c)\Rightarrow 2b=a+c\ ,$$
$$B=ab+bc+ca=3\frac{a+b}{2}\frac{b+c}{2}\Rightarrow 3b^2=ab+bc+ca=b(a+c)+ca=2b^2+ca\ .$$

Combinando estas dos ecuaciones se tiene que

$$4ca=b^2=(a+c)^2, \qquad (a-c)^2=(a+c)^2-4ca=0\ ,$$

de donde necesariamente $a=c$, y por lo tanto $b=a=c$. Obtenemos entonces que $A=-3a$, $B=3a^2$, $C=-a^3$, y

$$P(x)=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3=(x-a)^3, \qquad Q(x)=3x^2-6ax+3a^2=3(x-a)^2\ ,$$

siendo $a=b=c$ cualquier número real.

Ejercicios propuestos

De tres números reales a, b y c, conocemos su suma s, la suma de sus cuadrados σ, y la suma de sus cubos S. Escribir una ecuación de tercer grado cuyas soluciones sean a, b y c, y resolverla en el caso particular en que s=1, σ=19, S=1. Resuélvela también en el caso en que s=6, σ=18, S=60.

Sean a, b, c números reales no nulos y distintos. Probar que si las ecuaciones $x^2+ax+bc=0$y $x^2+bx+ca=0$ tienen una raíz común, entonces las restantes raíces verifican la ecuación $x^2+cx+ab=0$.

Se suponen conocidas las raíces reales de las n ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

Ecuación	Raíces
$x^2+a_1x+b_1=0$	x_0, x_1
$x^2+a_2x+b_2=0$	x_0, x_2
…	…
$x^2+a_nx+b_n=0$	x_0, x_n

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación

$$x^2+\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}x+\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}=0\,.$$

Dado el polinomio $p(x)=x^3+Bx^2+Cx+D$, prueba que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D=C^3$.